mmlung Göschen

gabensammlung
zur
nktionentheorie

Von

Prof. Dr. Konrad Knopp

II

Aufgaben zur höheren Funktionentheorie



878

Bibliothek zur Mathematik und Astronomie

aus der Sammlung Göschen

Sammlung Göschen

Aufgabensammlung

zur

Funktionentheorie

Von

Dr. Konrad Knopp

ord. Professor der Mathematik
an der Universität Tübingen

II. Teil

Aufgaben zur höheren Funktionentheorie



Berlin und Leipzig
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlags-buchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
1928

Druck von C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig. 906227

Inhaltsverzeichnis.

[1]) Die Gegenstände von § 11 und Kapitel VI des I. Teiles finden in § 16 bzw. Kapitel VII besondere Berücksichtigung.

[2]) Die in der ersten Spalte angegebene Seitenzahl bezieht sich auf die Aufgaben, die in der zweiten angegebene auf die Lösungen.

Vorbemerkungen.

Auch in diesem zweiten Teil der Aufgabensammlung zur Funktionentheorie — auf den ersten Teil wird kurz mit „I“ unter Angabe von Seite oder Paragraph und Aufgabe, auf den vorliegenden zweiten Teil nur durch Angabe von Seite oder Paragraph und Aufgabe verwiesen — habe ich mich streng an die in der Sammlung Göschen vorhandenen funktionentheoretischen Bändchen gehalten. Sie werden wie bisher zitiert, doch beziehen sich die Zitate auf die folgenden inzwischen erschienenen neuen Auflagen:

K I = Knopp, Funktionentheorie I, 2. Auflage, durchgesehener Neudruck, 1926;

K II = Knopp, Funktionentheorie II, 2. Auflage, durchgesehener Neudruck, 1926;

Bi = Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung, 2. neubearbeitete Auflage, 1927.

Auch diesmal handelt es sich in der Hauptsache nur um Übungsaufgaben, durch die der Gedankenkreis der genannten Bändchen nicht wesentlich überschritten wird. Nur innerhalb dieses Rahmens, nicht in irgendeinem absoluten Sinne, ist die Einteilung in elementare und höhere Funktionentheorie gemeint. Die jetzigen Aufgaben lehnen sich in der Hauptsache an die letzten Kapitel von K I, sowie an K II und Bi an. Für die Benutzung sind weiterhin die Vorbemerkungen zu I maßgebend. — Mit der Verteilung der Sternchen (*) zur Bezeichnung der schwierigeren Aufgaben ist, dem jetzigen höheren Niveau entsprechend, etwas sparsamer umgegangen worden.

Seit dem Erscheinen von I ist eine besonders reichhaltige funktionentheoretische Aufgabensammlung herausgekommen:

G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Band I und II, Berlin 1925,

auf die hier besonders hingewiesen sein soll. Es mag als ein Beweis für die Fruchtbarkeit der funktionentheoretischen Gefilde angesehen werden, daß trotz des Umfangs dieses Werkes und trotz ähnlich gerichteter Ziele die Berührungsflächen zwischen ihm und dem vorliegenden Bändchen nur gering sind.

Erster Teil.

Aufgaben.

I. Kapitel.

Einige weitere Aufgaben zu den Gegenständen der ersten fünf Kapitel (§§ 1—10[1])) des I. Teiles der Aufgabensammlung.

§ 1. Grundlegende Begriffe.

1. Es seien k Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_k$ in der Ebene der komplexen Zahlen gegeben, und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nichtnegative Zahlen, für die $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$ ist. Dann liegt die Zahl $\zeta = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_k z_k$ in dem kleinsten konvexen (abgeschlossenen) Polygon, das die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_k$ enthält. — Gilt dies noch für unendliche Folgen (z_n) und (α_n), falls nur $\sum \alpha_n = 1$ und $\sum \alpha_n z_n = \zeta$ existiert?

2. Haben die z_ν und α_ν dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Aufgabe, so liegt auch jeder Punkt ζ, für den

$$\frac{\alpha_1}{\zeta - z_1} + \frac{\alpha_2}{\zeta - z_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{\zeta - z_k} = 0$$

ist, in dem kleinsten konvexen (abgeschlossenen) Polygon, das die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_k$ einschließt.

3. Das kleinste konvexe (abgeschlossene) Polygon, das die Wurzeln einer ganzen rationalen Funktion $G(z)$ einschließt, enthält auch alle Wurzeln ihrer Ableitung $G'(z)$.

*4. In der Ebene der komplexen Zahlen sind $n \geqq 4$ Punkte gegeben, von denen keine 4 auf einem Kreise liegen. Es sei $l_\nu(z)$ eine lineare Abbildung, für die $l_\nu(z_\nu) = \infty$ ist,

[1]) Vgl. Fußnote 1 auf S. 3.

und das kleinste konvexe Polygon π_ν, das die Bilder der übrigen enthält, habe a_ν Ecken; $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Dann gelten die folgenden Behauptungen:

a) Es ist stets $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 6(n-2)$,

b) die π_ν haben nicht sämtlich 6 oder mehr Ecken,

c) für $n < 12$ tritt unter den π_ν stets ein Dreieck oder ein Viereck auf,

d) fehlen für $n \geqq 12$ die Drei- und Vierecke gänzlich, so gibt es unter den π_ν mindestens 12 Fünfecke.

*5. In der Ebene der komplexen Zahlen sind $n \geqq 4$ Punkte gegeben, von denen keine 4 auf einem Kreise liegen. Sie bestimmen daher $\binom{n}{3}$ verschiedene Kreise. Von diesen Kreisen haben stets genau $2(n-2)$ die Eigenschaft, daß das eine der beiden Gebiete, in die die Ebene durch sie geteilt wird, keinen der gegebenen Punkte enthält.

6. Jedes geschlossene Polygon $\mathfrak{p}$, das sich beliebig selbst überschneidet (d. h. also jeder aus endlich vielen aneinandergehängten orientierten Strecken bestehende Linienzug, dessen letzter Punkt mit dem ersten zusammenfällt), läßt sich in eine endliche Anzahl geschlossener Polygone zerlegen, deren jedes sich nicht selbst überschneidet, so daß also der Umfang eines jeden derselben genau einmal in bestimmtem Sinn durchlaufen wird, wenn $\mathfrak{p}$ einmal im Sinne der Orientierung durchlaufen wird. (Vgl. K I, S. 60, wo dieser Satz ohne Beweis benutzt ist.)

§ 2. Zahlenfolgen und unendliche Reihen.

1. Aus der Konvergenz der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$$

folgt für jedes positiv-ganze q die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^q.$$

2. Aus den beiden unendlichen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ bilde man durch die Festsetzung

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

eine dritte Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Dann gelten die 3 Sätze:

a) Wenn die beiden ersten Reihen absolut konvergieren und die Summen A bzw. B haben, so konvergiert auch die dritte und hat die Summe $C = AB$.

b) Für die Gültigkeit des Satzes a) ist es hinreichend, wenn von den beiden ersten Reihen nur die eine absolut, die andere aber wenigstens bedingt konvergiert.

c) Falls alle drei Reihen konvergieren (wenn auch nur bedingt), so besteht zwischen ihren Summen A, B und C jedenfalls die Beziehung $C = AB$.

3. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergieren auch stets die beiden Reihen

$$\text{a)} \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left[\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \cdots + \binom{n}{n} a_n \right]$$

und haben dieselbe Summe wie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i\alpha}}$ konvergiert für kein reelles α.

5. Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+i\alpha} \log n}$ konvergiert für jedes reelle $\alpha \neq 0$.

6. Für welche z gilt die — durch formale Entwicklung von $(1-1)^z$ entstehende — Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1^n) \binom{z}{n} = 0\,?$$

7*. Man zeige, daß für $|z| < 1$ die folgenden Identitäten bestehen:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{1-z^n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^n},$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^n}{1-z^n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2},$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{z^n}{1-z^n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+z^n),$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{z^n}{1-z^n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha z^n}{1-\alpha z^n}, \quad |\alpha| < 1.$$

*8. Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$, ist (b_n) eine Zahlenfolge, für die

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \to \beta$$

strebt, und ist hierbei $|\beta| < r$, so strebt

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{b_n} \to f(\beta).$$

*9. Es seien $\alpha > 0$, $\beta > 0$ zwei positive Zahlen mit der Summe 1. Es werde bei gegebenem $z_0 \neq 0$

$$z_1 = \alpha z_0 + \frac{\beta}{z_0}$$

und für $n \geqq 1$ allgemein

$$z_n = \alpha z_{n-1} + \frac{\beta}{z_{n-1}}$$

gesetzt. Dann strebt

$$z_n \to +1, \quad \text{falls} \quad \Re(z_0) > 0,$$
$$z_n \to -1, \quad \text{falls} \quad \Re(z_0) < 0$$

war. Für $\Re(z_0) = 0$ ist die Folge divergent.

10. Im Anschluß an § 1, Aufg. 1 und I, § 3, Aufg. 6, zeige man folgendes: Es sei (z_n) eine beliebige beschränkte

Zahlenfolge und $\mathfrak{K}$ der kleinste konvexe Bereich, der alle ihre Häufungspunkte ζ enthält. Ist dann die Folge (z'_n) wie in I, § 3, Aufg. 6 aus der Folge (z_n) hergeleitet und sind dabei alle Transformationskoeffizienten $a_{\varkappa\lambda} \geqq 0$, so enthält $\mathfrak{K}$ auch alle Häufungspunkte ζ' der Folge (z'_n).

§ 3. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

1. a) Kann eine für $|z| < 1$ definierte stetige Funktion komplexen Argumentes so beschaffen sein, daß sie nur im Nullpunkt differenzierbar ist? — b) Kann eine in einem Gebiete stetige Funktion $f(z)$ dort ausschließlich längs gewisser Linienzüge differenzierbar sein?

*2. Kann eine in einem Gebiete G definierte Funktion $f(z)$ so beschaffen sein, daß sie in überall dicht gelegenen Punkten von G differenzierbar und gleichzeitig in anderen überall dicht gelegenen Punkten von G **nicht** differenzierbar ist?

3. Kann eine in einem Gebiete G definierte und dort differenzierbare Funktion $f(z)$ in einem Teilgebiete G_1 von G überall reell sein oder allgemeiner einen konstanten reellen oder einen konstanten imaginären Teil oder einen konstanten Arcus oder einen konstanten absoluten Betrag haben?

4. Die Funktion $f(z)$ sei in $|z| < 1$ differenzierbar und ihre Ableitung $f'(z)$ sei dort beschränkt. Dann nimmt $f(z)$ längs $|z| = 1$ stetige Randwerte an, und diese bilden mit $f(z)$ zusammen eine in $|z| \leqq 1$ gleichmäßig stetige Funktion. (Vgl. hierzu I, § 5, Aufg. 8 und 9.)

5. Es ist $\sqrt{x + iy} =$

$$\pm\left\{\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)} + i\cdot\operatorname{sign} y\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)}\right\}.$$

6. Welche Inkonsequenz gegenüber anderweitigen Festsetzungen liegt darin, daß unter e^z allgemein die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ verstanden wird?

7. a) Welche Grenzwerte hat die Funktion $e^{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2}$, wenn man sich aus dem Innern des Einheitskreises geradlinig dem Punkte $+1$ nähert?

b) Wie verhält sich $e^{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2}$, wenn man sich längs der Peripherie $|z| = 1$ dem Punkte $+1$ nähert?

8. a) Die Funktion z^a ist dann und nur dann eindeutig, wenn a eine reelle ganze Zahl ist.

b) Der Hauptwert der Funktion z^i bleibt für alle z der Ebene seinem Betrage nach unterhalb einer festen Konstanten.

9. Der für $|z| < 1$ reguläre Zweig der Funktion $f(z) = (1 - z)^i$, der in $z = 0$ gleich $+1$ ist, hat einen absoluten Betrag, der für $|z| < 1$ zwischen zwei festen positiven Zahlen liegt.

*10. Wie verhält sich die Funktion $z^3 e^{-i \log^2 z}$, in der $\log z$ den Hauptwert bedeuten soll, wenn sich z aus der (abgeschlossenen) rechten Halbebene her geradlinig gegen 0 bewegt?

§ 4. Integralsätze.

1. a) Kann ein rektifizierbarer Weg so beschaffen sein, daß er in einem oder in unendlich vielen seiner Punkte keine Tangente besitzt?

*b) Kann er in überall dicht auf ihm gelegenen Punkten oder gar in allen keine Tangente besitzen?

*2. Der rektifizierbare Weg L sei durch die Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta$$

gegeben. Längs L seien die Funktionen $f(z)$ und $\varrho(z)$ stetig, die letztere überdies ständig positiv-reell. Es sei L' das Bild von L bei der Abbildung durch $w = f(z)$. Wird dann

$$\int_\alpha^\beta f(z)\, \varrho(z)\, dt = \mu \cdot \int_\alpha^\beta \varrho(z)\, dt$$

gesetzt, so liegt μ in jedem konvexen Polygon, das die Punkte von L' enthält.

3. Es sei $F(z)$ eine längs des (abgeschlossenen) Weges L stetige Funktion von z. Man zeige, daß der im üblichen Sinne verstandene Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{n} |z_\lambda - z_{\lambda-1}| \cdot F(\zeta_\lambda) \right\} = {}^{(L)}\!\int F(z)\, |dz|$$

stets vorhanden ist (s. K I, § 12.)

4. Ist $f(z)$ eine längs des Weges L stetige Funktion von z, so ist stets

$$\left| {}^{(L)}\!\int f(z)\, dz \right| \leqq {}^{(L)}\!\int |f(z)|\, |dz|,$$

wenn das rechtsstehende Integral im Sinne der vorigen Aufgabe (mit $F(z) = |f(z)|$) verstanden wird.

5. Wie hängt das in Aufg. 3 definierte Integral mit den Kurvenintegralen

$${}^{(L)}\!\int U(x, y)\, ds \quad \text{und} \quad {}^{(L)}\!\int V(x, y)\, ds$$

zusammen, wenn $F(z) = U(x, y) + i V(x, y)$ gesetzt wird?

6. Man beweise den in I, § 5, Aufg. 13 formulierten Satz ohne Zerlegung in Reelles und Imaginäres durch Benutzung der Cauchyschen Integralformeln.

*7. Die Funktion $F(z, t)$ sei definiert, sobald z in einem Gebiete G und zugleich t auf einem Wege L der z-Ebene liegt, der a mit b verbindet. Für alle diese Wertepaare sei überdies $F(z, t)$ beschränkt, etwa $|F(z, t)| < M$. Wenn dann $F(z, t)$

a) für jedes feste t auf L eine in G reguläre Funktion von z ist und

b) für jedes feste z aus G eine längs L stetige Funktion von t ist,

so wird durch

$${}^{(L)}\!\int_a^b F(z, t)\, dt = f(z)$$

eine innerhalb G reguläre Funktion von z definiert, für deren Ableitung die Darstellung gilt:

$$f'(z) = {}^{(L)}\int_a^b F'_z(z, t)\, dt.$$

[Anl.: Man betrachte das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\, {}^{(L)}\int_a^b \left\{ {}^{(K)}\int \frac{F(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta \right\} dt,$$

in dem K eine kleine Peripherie um z bedeutet, und wende die Methoden aus K I, § 19 an.]

§ 5. Reihenentwicklungen.

1. Es sei G ein abgeschlossenes, beschränktes Gebiet. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ sei gleichmäßig konvergent in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes z_0 von G, soweit sie zu G gehört. Dann ist die Reihe in G gleichmäßig konvergent.

2. Man beweise den Satz K I, § 22, Satz 3, ohne Hilfe des Satzes von Morera, etwa auf Grund der Cauchyschen Integralformel und der Sätze K I, § 19.

3. Im Anschluß an K I, § 22, Satz 3, zeige man, daß, wenn neben der Reihe $\sum f_n(z)$ auch die Reihe $\sum |f_n(z)|$ in jedem G' gleichmäßig konvergiert, dieser Satz 3 dahin verschärft werden kann, daß auch die Reihen $\sum |f_n^{(p)}(z)|$ bei festem p in jedem G' noch gleichmäßig konvergieren.

4. Die Funktionen $f_0(z), f_1(z), \ldots$ seien in G regulär und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = F(z)$ sei in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von G gleichmäßig konvergent, aber $F(z)$ nicht identisch gleich 0. Dann sind die innerhalb von G gelegenen Nullstellen von $F(z)$ identisch mit den dort gelegenen Häufungsstellen der Nullstellen der Abschnitte

$$s_n(z) = f_0(z) + \cdots + f_n(z).$$

5. Die Potenzreihe

$$f(z) = (1-z)^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-i}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

ist für $|z| < 1$ konvergent und es ist dort $|f(z)| < e^{\frac{\pi}{2}}$. Man zeige überdies, daß

$$|n b_n| \to \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

strebt.

6. Der Hauptwert der Funktion $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ ist in der Umgebung des Nullpunktes regulär. Man stelle den Anfang der zugehörigen Potenzreihenentwicklung auf.

*7. Im Anschluß an die Aufgabe I, § 10, 1a stelle man die vollständige Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = e^{\alpha \frac{z}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

auf und zeige, daß für positive α die Koeffizienten c_n eine Abschätzung der Form

$$c_n = e^{2\sqrt{\alpha n}(1+\varepsilon_n)}$$

gestatten, in der die ε_n eine Nullfolge bilden.

II. Kapitel.

Singuläre Stellen.

§ 6. Die Laurentsche Entwicklung.

1. In dem von dem geschlossenen Wege K_1 begrenzten Gebiete liege der geschlossene Weg K_2. In dem Ringgebiete G zwischen beiden sei $f(z)$ eindeutig und regulär. Dann kann

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

gesetzt werden, wenn $f_1(z)$ eine innerhalb K_1 und $f_2(z)$ eine außerhalb K_2 (einschließlich ∞) reguläre Funktion bedeutet. Durch diese Zerlegung von $f(z)$ sind überdies die Funk-

tionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

2. Man erweitere den Satz der vorigen Aufgabe für den Fall, daß K_1 mehrere geschlossene Wege $K_2, K_3, \ldots, K_m$ $(m > 2)$ umschließt, die einander nicht treffen noch umschließen, und daß nun $f(z)$ in demjenigen Gebiete als eindeutig und regulär vorausgesetzt wird, das innerhalb K_1, aber außerhalb eines jeden der Wege $K_2, \ldots, K_m$ liegt.

3. Man entwickle die Funktion

a) $e^{\frac{1}{z-1}}$ für $|z| > 1$,

b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$ für $|z| > 2$,

c) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ für $0 < |a| < |z| < |b|$,

d) desgleichen für $|z| > b$,

e) $\log \dfrac{1}{1-z}$ für $|z| > 1$

in ihre Laurentsche Reihe.

4. Es sei

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ eine ganze Funktion von } z,$$

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^n} \text{ eine ganze Funktion von } \frac{1}{z}.$$

Wo ist die Funktion $g(z) \cdot \gamma(z)$ regulär und wie lautet dort ihre Laurentsche Entwicklung?

5. Es seien $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ und $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$ zwei in demselben Kreisringe konvergente Laurentsche Entwicklungen. Wie lautet die Laurentsche Entwicklung des Produktes der durch sie dargestellten Funktionen?

6. Wie lautet die Laurentsche Entwicklung für die in $0 < |z| < +\infty$ reguläre Funktion

$$e^{c\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,?$$

§ 7. Die verschiedenen Arten singulärer Stellen.

1. Was für eine singuläre Stelle haben die folgenden Funktionen in $z = \infty$:

a) $\frac{z^2+4}{e^z}$, b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, c) $\cos z - \sin z$,

d) $\frac{1}{\cos z}$, e) $\operatorname{ctg} z$, f) $e^{-\frac{1}{z^2}}$,

g) $\sin\frac{1}{1-z}$, h) $\frac{1}{1-e^z}$, i) $\frac{1-e^z}{1+e^z}$?

2. Was für eine Singularität hat die Funktion

a) $e^{\frac{1}{z}}$ in $z = 0$, b) $\sin\frac{1}{1-z}$ in $z = 1$,

c) $\frac{1}{1-e^z}$ in $z = 2\pi i$, d) $\frac{1}{\sin z - \cos z}$ in $z = \frac{\pi}{4}$?

3. Im Punkte z_0 habe die Funktion $f_1(z)$ eine Nullstelle α^{ter} Ordnung, die Funktion $f_2(z)$ einen Pol β^{ter} Ordnung $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$. Was für eine Stelle ist z_0 für eine der Funktionen

$$f_1 \pm f_2, \quad f_1 \cdot f_2, \quad \frac{f_1}{f_2}, \quad \frac{f_2}{f_1}?$$

4. Man beweise die Tatsache, daß e^z keine Nullstellen besitzt, mit Hilfe des Satzes 1 in K I, § 35.

5. Welche wesentliche Verschiedenheit besteht zwischen dem Verhalten der reellen Funktion

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

und der Funktion komplexen Argumentes $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$ in der Nähe des Nullpunktes?

6. Die Funktion $f(z)$ habe in z_0 einen Pol β^{ter} Ordnung. Unter welchen Bedingungen sind die Funktionen

$$F_0(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz \quad \text{und} \quad F_1(z) = \int_{z_1}^{z} f(z)\, dz \qquad (z_1 \neq z_0)$$

in der Umgebung von z_0 eindeutig und regulär, und wie verhalten sie sich in solchem Falle in z_0?

7. L sei ein beliebiger beschränkter Weg (geschlossen oder offen) und $\varphi(z)$ eine längs L definierte und dort stetige Funktion. Dann ist (s. K I, § 19)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} {}^{(L)}\!\int \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

außerhalb eines hinreichend großen Kreises K um 0 eindeutig und regulär. Wie verhält sich $f(z)$ in $z = \infty$?

8. Es sei $f(z)$ für $|z| > R$ eindeutig und, von $z = \infty$ etwa abgesehen, auch regulär. Unter welchen Bedingungen ist dort auch die Funktion

$$F(z) = {}^{(L)}\!\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

eindeutig und regulär, wenn z_0 und L in $|z| > R$ liegen? Und was folgt aus dem Verhalten von $f(z)$ in ∞ über dasjenige von $F(z)$ in ∞?

9. Man beweise den Riemannschen Satz K I, § 34, ohne Benutzung der Laurentschen Entwicklung direkt mit Hilfe der Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} {}^{(K_1)}\!\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} {}^{(K_2)}\!\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

in der K_1 und K_2 zwei passende Kreise um z_0 bedeuten und z im Ringgebiete zwischen beiden liegt.

10. Man beweise den Casorati-Weierstraßschen Satz „$|f(z) - c| < \varepsilon$“ (s. K I, S. 117), indem man die entgegengesetzte Annahme „$\left|\frac{1}{f(z) - c}\right| \leqq \frac{1}{\varepsilon}$“ mit Hilfe des nach der vorigen Aufgabe bewiesenen Riemannschen Satzes ad absurdum führt.

*11. Die Funktion $w = f(z)$ habe in z_0 eine wesentlich singuläre Stelle; dann gibt es in jeder Nähe jeder komplexen Zahl c eine andre Zahl a, so daß $f(z)$ in der Umgebung von z_0 unendlich viele a-Stellen hat.

§ 8. Residuensatz, Nullstellen und Pole.

1. Mit Hilfe des Satzes in K II, § 11, S. 104, beweise man den Fundamentalsatz der Algebra, indem man

$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$ und $f(z) = a_n z^n$, $(a_n \neq 0)$, setzt und für C einen Kreis mit hinlänglich großem Radius wählt.

2. Der Satz „Wenn die ganze rationale Funktion $g(z)$ lauter reelle Wurzeln hat, so hat auch ihre Ableitung $g'(z)$ lauter reelle Wurzeln" (vgl. § 1, Aufg. 3) gilt nicht für ganze transzendente Funktionen. Man belege diese Behauptung durch ein Beispiel.

3. Man bestimme die Residuen von

a) $\dfrac{1}{\sin z}$ in $z = k\pi$,

b) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in $z = +1$ und $z = +2$,

c) $\dfrac{a}{(z-z_1)^m (z-z_2)}$ in z_1 und $z_2 \neq z_1$, $(a \neq 0)$,

d) $\operatorname{tg} z$ in $z = z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, e) $e^{\frac{1}{z}}$ in $z = 0$,

f) $e^{\frac{1}{z-1}}$ in $z = +1$, g) $\dfrac{1}{1-e^z}$ in $z = 2k\pi i$.

4. Die Funktion $f(z)$ habe in z_0 eine Nullstelle α^{ter} Ordnung. Welches ist das Residuum von

$$z\,\frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{und} \quad \varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)},$$

wenn $\varphi(z)$ eine beliebige in z_0 reguläre Funktion bedeutet? Wie lautet die Antwort, wenn $f(z)$ in z_0 einen Pol β^{ter} Ordnung hat?

5. Im Anschluß an die vorige Aufgabe bestimme man den Wert und die Bedeutung der Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

wenn bezüglich $f(z)$ und C die Voraussetzungen des Satzes 1 oder die des Satzes 2 aus K I, § 35, gemacht werden.

6. In z_0 seien $f(z)$ und $g(z)$ regulär, es sei $f(z_0) \neq 0$, während $g(z)$ in z_0 von der zweiten Ordnung verschwindet. Welches Residuum hat $\frac{f(z)}{g(z)}$ im Punkte z_0? Wie lautet die Antwort, wenn $g(z)$ in z_0 von der dritten Ordnung verschwindet?

7. Man bestimme mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale

a) $\int^{(C)} \frac{e^z}{z}\, dz$, falls C der Kreis $|z| = 1$ ist,

b) $\int^{(C)} \operatorname{tg} \pi z\, dz$, „ C „ „ $|z| = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ist,

c) $\int^{(C)} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_k)}\, dz$,

falls C der Kreis $|z| = R$ ist

und unter der Annahme, daß die z_λ voneinander verschieden und alle $|z_\lambda| < R$ sind und daß $f(z)$ in $|z| \leqq R$ eindeutig und regulär ist.

8. Es sei $R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k}$ eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten, deren Nenner für keinen reellen Wert von x verschwindet, während der Grad des Nenners den des Zählers um mindestens zwei Einheiten übertrifft ($a_m \neq 0$, $b_k \neq 0$, $k \geqq m + 2$). Dann ist das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx$$

konvergent und gleich $2\pi i$ mal der Summe S der Residuen der in der oberen Halbebene gelegenen Pole von $R(z)$.

9. Im Anschluß an I, § 7, Aufg. 5 und 6 zeige man, daß

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

ist. [Anl.: Das erste und dritte der dortigen Integrale ergeben zusammen

$$2i\int_{\varrho}^{r}\frac{\sin x}{x}\,dx.]$$

*10. Unter Verwertung des reellen Integrals $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ berechne man die Fresnelschen Integrale

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

indem man die ganze Funktion e^{-z^2} über den geschlossenen Weg C integriert, der von 0 geradlinig nach $+R$, von hier längs $|z| = R$ zum Punkte $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ und von hier geradlinig zurück nach 0 führt. (Man läßt dann $R \to +\infty$ streben.)

III. Kapitel.

Ganze und meromorphe Funktionen.

§ 9. Unendliche Produkte. Weierstraßscher Produktsatz.

1. Es soll die Konvergenz und der Wert der folgenden Produkte mit konstanten Faktoren festgestellt werden:

a) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$; b) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;

c) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$; d) $\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2+1}{n^2}\cdot\ldots$.

2. Die reellen Zahlen ϑ_n sollen für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ der Bedingung $0 < \vartheta_n < 1$ genügen, sonst aber ganz beliebig sein. Dann ist die Reihe

$$\vartheta_1 + [\vartheta_2(1-\vartheta_1)] + \cdots + [\vartheta_n(1-\vartheta_1)\cdots(1-\vartheta_{n-1})] + \cdots$$

stets konvergent.

3. Der Satz 4 in K II, § 2, S. 17, soll a) mit, b) ohne Benutzung der Exponentialfunktion bewiesen werden.

4. Es sei $\sum |a_n|^2$ konvergent. Dann sind die beiden Reihen $\sum a_n$ und $\sum \log(1+a_n)$, bei denen alle $a_n \neq -1$ angenommen sind und unter log der Hauptwert verstanden werden soll, entweder beide konvergent oder beide divergent. Im ersten Falle ist die Konvergenz entweder bei beiden eine absolute oder bei beiden eine bedingte.

5. Es soll das Gebiet der absoluten Konvergenz der folgenden Produkte mit veränderlichen Gliedern festgestellt werden:

$$\text{a)}\ \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n); \qquad \text{b)}\ \prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n});$$

$$\text{c)}\ \prod_{n=0}^{\infty}(1+c_n z), \quad \text{wenn} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n| \ \text{konvergiert};$$

$$\text{d)}\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^z}\right); \qquad \text{e)}\ \prod\left(1-\frac{1}{p^z}\right),$$

wenn hierin p alle Primzahlen durchläuft.

6. Für $|z|<1$ ist

$$\text{a)}\ \frac{1}{1-z}=(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\ldots;$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\ldots}=(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots.$$

(Vgl. K II, § 2, S. 17, Satz 6).

7. Die Funktionen $f_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, seien im Kreise $|z|<r$ regulär und $\sum |f_n(z)|$ sei in jedem kleineren Kreise $|z|\leqq\varrho<r$ gleichmäßig konvergent, so daß (nach K II, § 2, Satz 7)

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))=\sum_{\lambda=0}^{\infty}A_\lambda z^\lambda$$

eine für $|z|<r$ reguläre Funktion ist. Setzt man nun $f_n(z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda^{(n)}z^\lambda$, also

$$F(z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}A_\lambda z^\lambda=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+a_0^{(n)}+a_1^{(n)}z+\cdots\right),$$

so wird behauptet, daß die Reihe $\sum A_\lambda z^\lambda$ auch durch gliedweises Ausmultiplizieren des letzten Produktes gewonnen werden kann, d. h. daß, wenn

$$(*) \qquad P_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} (1 + f_\nu(z)) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda^{(n)} z^\lambda$$

gesetzt wird, für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} A_\lambda^{(n)} = A_\lambda$$

ist.

8. Auf Grund des Satzes der vorigen Aufgabe multipliziere man das Produkt

$$\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

gliedweise aus und vergleiche das Ergebnis mit der Potenzreihe für $\sin \pi z$, — wenigstens hinsichtlich der Koeffizienten von z^3 und z^5.

9. Auf Grund des Satzes in Aufgabe 7 entwickle man die folgenden Produkte in eine Potenzreihe:

a) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_\lambda z^\lambda$, falls $\sum |c_n|$ konvergiert;

*b) $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda z^\lambda$, falls $|q| < 1$;

Anl.: Es ist $f(z) = (1 + qz) f(q^2 z)$, woraus sich durch Koeffizientenvergleich Rekursionsformeln ergeben.

c) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n z) \left(1 + \frac{c_n}{z}\right) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} D_\lambda z^\lambda$,

falls $\sum |c_n|$ konvergiert;

*d) $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} z) \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{z}\right) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} B_\lambda z^\lambda$,

falls $|q| < 1$;

Anl.: Es ist $F(z) = qz\, F(q^2 z)$, woraus sich durch Koeffizientenvergleich wieder Rekursionsformeln für die B_λ ergeben, vermöge deren $B_1, B_2, \ldots$ sich durch B_0 ausdrücken

lassen. Es wird $B_\lambda = q^{\lambda^2} \cdot B_0$. Aus $q^{\lambda^2} \cdot B_0 = A_\lambda + A_1 A_{\lambda+1} + \cdots$, was wie bei c) erhalten wird, ergibt sich schließlich B_0 aus $B_0 = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \frac{A_\lambda}{q^{\lambda^2}}$.

*e) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - z^n)$. Anl.: Man ersetze in d) z durch $-z^{\frac{1}{2}}$ und q durch $z^{\frac{3}{2}}$, $|z| < 1$.

10. Aus dem sin-Produkt leite man her:

a) $\sqrt{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdots$;

b) $\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdots$.

11. Man stelle Produktentwicklungen für die folgenden ganzen Funktionen auf:

a) $e^z - 1$; b) $e^z - e^{z_0}$; c) $\cos \pi z$;

d) $\sin \pi z - \sin \pi z_0$; e) $\cos \pi z - \cos \pi z_0$.

*12. Man beweise die folgende Übertragung des Weierstraßschen Produktsatzes auf das Gebiet des Einheitskreises:

$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sei eine beliebige Folge verschiedener innerhalb des Einheitskreises gelegener Punkte, die innerhalb des Einheitskreises keinen Häufungspunkt haben (sondern also nur auf dessen Peripherie), und es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ eine Folge beliebiger positiver ganzer Zahlen. Dann läßt sich stets eine Funktion $f(z)$ konstruieren — und zwar in einer dem Weierstraßschen Produkt genau analogen Form —, die im Einheitskreise regulär ist und die dort genau an den Stellen z_n (und keinen andern) Nullstellen der Ordnung α_n hat.

Wegen weiterer Verallgemeinerung auf beliebige Gebiete an Stelle des Einheitskreises vgl. § 11, Aufg. 7.

13. Man bilde mit Hilfe des in der vorigen Aufgabe formulierten Satzes Funktionen, die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben, aber im Innern desselben regulär sind.

§ 10. Ganze Funktionen.

1. Eine ganze Funktion, die jeden Wert ein und nur einmal annimmt, ist eine ganze lineare Funktion.

2. Die inverse Funktion zu einer ganzen Funktion kann nicht wieder eine ganze Funktion sein, außer wenn es sich um eine lineare Funktion handelt.

3. Der Liouvillesche Satz, daß eine beschränkte ganze Funktion $g(z)$ eine Konstante ist, soll ausschließlich mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der ganzen Funktionen (also ohne Benutzung der Cauchyschen Integralformel, wie sie in K I, § 30 herangezogen wurde) bewiesen werden. — Anl.: Man betrachte den Quotienten $g_1(z) = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$ für große z und verwende den Satz 5 in K I, § 24.

4. Gibt es ganze transzendente Funktionen $g(z)$, für die auf jedem Nullstrahl $|g(z)| \to +\infty$ strebt?

5. Die Funktion $f(z)$ sei in z_0 regulär. Wenn dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z_0)$ konvergiert, so ist $f(z)$ eine ganze Funktion und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$ konvergiert für jedes z.

6. Es lassen sich ganze Funktionen angeben, die an gegebenen Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, wofern diese sich nirgends im Endlichen häufen, gegebene Werte $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ annehmen.

7. Es seien $\alpha \neq 0$ und β beliebig gegebene reelle Zahlen. Dann gibt es stets eine ganze Funktion $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit reellen, rationalen Koeffizienten, so daß $g(\alpha) = \beta$ ist.

8. Die in der vorigen Aufgabe ausgesprochene Behauptung bleibt auch richtig, wenn das Wort „reell“ an beiden Stellen gestrichen wird.

9. Das Maximum des Betrages $|g(z)|$ einer ganzen Funktion $g(z)$ im Kreise $|z| \leq r$ wird nach K I, § 24, Satz 5, in gewissen Punkten des Randes $|z| = r$ erreicht. Dieses

Maximum werde mit $M(r)$ bezeichnet. Man zeige, daß $M(r)$ nicht nur eine monotone, sondern auch eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen r ist.

10. Man stelle die in der vorigen Aufgabe definierte Funktion $M(r)$ für die ganzen transzendenten Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ her.

*11. Man zeige an Beispielen, daß die in der zweitletzten Aufgabe definierte Funktion $M(r)$ keine analytische Funktion der reellen Veränderlichen r zu sein braucht.

§ 11. Partialbruchreihen. Mittag-Lefflerscher Satz.

1. Man stelle die Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung für die folgenden meromorphen Funktionen auf:

a) $\operatorname{tg} z$ oder etwas bequemer $\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$;

b) $\frac{1}{\sin z}$ oder $\frac{\pi}{\sin \pi z}$; c) $\frac{\pi}{\cos \pi z}$;

d) $\frac{1}{e^z - 1}$; e) $\frac{\pi}{\cos \pi z - \sin \pi z}$.

2. Man führe die in K II, §6, S. 49/50 angedeutete Herleitung des Weierstraßschen aus dem Mittag-Lefflerschen Satze vollständig durch.

3. Gilt der Mittag-Lefflersche Satz in der K II, § 4, S. 41, formulierten Gestalt auch dann noch, wenn die vorgeschriebenen Hauptteile $h_\lambda(z)$ unendlich viele negative Potenzen von $(z - z_\lambda)$ enthalten dürfen? Es würde sich dann um Funktionen handeln, die in der ganzen Ebene nur isolierte singuläre Stellen haben, und um die Frage, ob an jeder dieser Stellen der absteigende Ast der zugehörigen Laurent-Entwicklung vorgeschrieben werden kann, und ob bzw. inwieweit eine solche Funktion dadurch bestimmt ist.

4. Darf — bei der Fragestellung der vorigen Aufgabe — auch an allen oder einigen oder einer der Stellen ein Anfangs-

stück des aufsteigenden Astes oder gar der ganze aufsteigende Ast der Laurent-Entwicklung vorgeschrieben werden?

*5. Man übertrage den Mittag-Lefflerschen Satz (ähnlich wie in § 9, Aufg. 12, den Weierstraßschen) auf den Einheitskreis, beweise also den Satz: Sind $z_0, z_1, \ldots, z_\lambda, \ldots$ irgendwelche Punkte, für die $|z_\lambda| < 1$, aber $|z_\lambda| \to 1$ gilt, sind die $h_\lambda(z)$ irgendwelche Hauptteile (mit endlich oder unendlich vielen negativen Potenzen), so gibt es stets eine Funktion $M_0(z)$, die für $|z| < 1$ eindeutig und, außer an den Stellen z_λ, auch regulär ist und die an den Stellen z_λ selbst isolierte singuläre Stellen mit $h_\lambda(z)$ als absteigendem Ast der Laurent-Entwicklung hat.

*6. In Verallgemeinerung des Mittag-Lefflerschen Satzes und desjenigen der vorigen Aufgabe beweise man den folgenden Satz: Es sei M eine unendliche Punktmenge, die nur aus isolierten Punkten besteht und daher abzählbar ist (Beweis?). Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots$ ihre Punkte und M' die Menge der Häufungspunkte von M. Jedem Punkte z_λ sei ferner ein Hauptteil $h_\lambda(z)$ zugeordnet. Dann läßt sich ähnlich wie beim Mittag-Lefflerschen Satz und bei dem der vorigen Aufgabe eine unendliche Reihe aufstellen, die für jedes z, das weder zu M noch zu M' gehört, konvergiert. Diese stellt überdies in jedem Gebiete G der z-Ebene, das keinen Punkt von M' enthält, eine eindeutige analytische Funktion dar, die in G überall regulär ist, außer in den dort gelegenen Stellen z_λ, wo die Funktion singuläre Stellen mit den Hauptteilen $h_\lambda(z)$ besitzt.

*7. Aus dem Satz der vorigen Aufgabe leite man eine analoge Erweiterung des Weierstraßschen Produktsatzes her und formuliere den dadurch gewonnenen Satz.

8. Haben M und M' dieselbe Bedeutung wie in Aufg. 6 und sind $w_1, w_2, \ldots$ irgendwelche komplexe Zahlen, so läßt sich stets ein Ausdruck hinschreiben, der in jedem nicht zu M und M' gehörigen Punkte z einen bestimmten Wert hat

und der in jedem Gebiete G der Ebene, das keinen Punkt von M' enthält, eine reguläre analytische Funktion darstellt, die in den zu G gehörigen Punkten z_λ den Wert w_λ hat.

9. In Erweiterung des in der vorigen Aufgabe genannten Satzes beweise man den (in gewissem Sinne diesen ganzen Fragenkreis abschließenden) Satz, daß der in Aufg. 6 formulierte Satz auch dann noch gilt, wenn die dort vorgeschriebenen Hauptteile $h_\lambda(z)$ noch je eine bestimmte Anzahl Glieder mit nicht-negativen Potenzen enthalten und also die Form

$$H_\lambda(z) = \sum_{k=-\infty}^{\beta_\lambda} a_k^{(\lambda)} (z - z_\lambda)^k$$

haben dürfen, bei der die β_λ gegebene nicht-negative ganze Zahlen sind.

§ 12. Meromorphe Funktionen.

1. Die Folge der Funktionen

$$g_n(z) = \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

ist in jedem beschränkten abgeschlossenen Gebiete, das keinen der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ enthält, gleichmäßig konvergent (natürlich gegen $\Gamma(z)$).

2. Es seien z_1 und z_2 zwei beliebige von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedene Zahlen und $z_1 \neq z_2$. Unter welchen Bedingungen ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{z_1(z_1+1)\ldots(z_1+n)}{z_2(z_2+1)\ldots(z_2+n)}$$

vorhanden und welchen Wert hat dann der Grenzwert?

3. Die sogen. Fakultätenreihe

$$\Omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

ist in genau denselben Punkten der z-Ebene konvergent wie die Dirichletsche Reihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

wofern die Punkte $0, -1, -2, \ldots$ außer Betracht gelassen werden.

4. Die beiden in der vorigen Aufgabe genannten Reihen sind auch in genau denselben Gebieten der z-Ebene gleichmäßig konvergent, wofern diese abgeschlossen sind und keinen der Punkte $0, -1, -2, \ldots$ enthalten.

5. Die in den vorangehenden Aufgaben genannten beiden Reihen sind auch in genau denselben (von $0, -1, -2, \ldots$ verschiedenen) Punkten der z-Ebene absolut konvergent.

6. Bedeutet $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ eine ganz beliebige Folge positiver ganzer Zahlen, so ist der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n+1}\right) \left(1 + \frac{z}{n+2}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n+p_n}\right) \right\}$$

dann und nur dann $= 1$, wenn $\frac{p_n}{n} \to 0$ strebt.

7. Genügt $z = x + iy$ der Bedingung $x \geqq -1$, $y \geqq 2$, so ist

$$\left| \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right| < A \log |z|,$$

wobei A eine feste (von z unabhängige) positive Konstante bedeutet.

*8. Man entwickle die Riemannsche ζ-Funktion für die Umgebung der Stelle $+2$ in eine Potenzreihe

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n (z-2)^n$$

und beweise die Beziehung $b_n \to 1$. Was folgt hieraus über den Charakter der Stelle $+1$ für die ζ-Funktion?

9. Man zeige, daß für die in der vorigen Aufgabe definierten Koeffizienten b_n die Abschätzung

$$|b_n - 1| < \frac{A}{2^n}$$

gilt, in der A eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Was folgt hieraus über die genauere Natur der Stelle $+1$ für die ζ-Funktion?

IV. Kapitel.

Periodische Funktionen.

§ 13. Einfach-periodische Funktionen.

1. Eine (nicht konstante) eindeutige analytische Funktion kann nicht die Perioden 1 und $\sqrt{2}$ haben.

2. Eine (nicht konstante) rationale Funktion kann nicht periodisch sein.

3. Hat $f(z)$ die primitive Periode 1 — es ist $f(z)$ dann sicher keine Konstante — und zeigt $f(z)$ ein gewisses Verhalten, wenn z so $\rightarrow \infty$ rückt, daß dabei $\mathfrak{J}(z) \rightarrow +\infty$ (oder $\rightarrow -\infty$) strebt, so sagt man kurz, daß $f(z)$ jenes Verhalten am oberen (bzw. unteren) Ende des Periodenstreifens zeige. Für die Funktionen $f(z)$ der in K II, § 8, S. 69, definierten Klasse gilt dann der Satz:

Ist $f(z)$ im Periodenstreifen regulär, so kann es nicht an beiden Enden beschränkt bleiben.

4. Bleibt eine der in der vorigen Aufgabe genannten Funktionen $f(z)$ am oberen (unteren) Ende des Periodenstreifens beschränkt, so strebt $f(z)$ dort sogar einem bestimmten Grenzwerte zu. Es ist dann sinngemäß zu sagen, daß $f(z)$ an jenem Ende des Streifens diesen Wert annehme. Wie ist unter diesen Umständen die Ordnung zu definieren, mit der $f(z)$ an einem Streifenende den Wert a annimmt?

5. Bleibt eine der in Aufg. 3 genannten Funktionen $f(z)$ am oberen (unteren) Ende des Streifens nicht beschränkt, so strebt $f(z)$ dort $\rightarrow \infty$. Es ist dann sinngemäß zu sagen, daß $f(z)$ an jenem Ende einen Pol besitze. Wie ist unter diesen Umständen die Ordnung eines solchen Poles zu definieren?

6. Eine jede der in Aufg. 3 genannten Funktionen $f(z)$ nimmt im Streifen (einschließlich seiner Enden) jeden Wert, auch den Wert ∞, bei richtiger Zählung gleich oft an.

7. Eine Funktion mit der primitiven Periode $+1$ gehört dann und nur dann zu der in Aufg. 3 genannten Klasse von Funktionen, wenn sie im Streifen, einschließlich seiner Enden, keine andern Singularitäten als Pole besitzt.

8. Was besagt bei der in Aufg. 3 dargelegten Auffassung der in K II, § 3, S. 31/32, durchgeführte Beweis, daß $h_0''(z) \equiv 0$ ist?

§ 14. Doppelt-periodische Funktionen.

1. Es sei das durch das primitive Periodenpaar ω, ω' bestimmte Periodengitter einer doppelt-periodischen Funktion vorgelegt. Man gebe sämtliche primitiven Periodenpaare an.

2. Sind $z_1, z_2, \ldots, z_k$ die Nullstellen oder allgemeiner die c-Stellen einer elliptischen Funktion $f(z)$ im Periodenparallelogramm, eine jede so oft gesetzt, wie es ihre Vielfachheit verlangt; sind $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ ebenso die Pole, so ist $\sum z_\varkappa - \sum \zeta_\varkappa$ gleich einer Periode der Funktion.

3. Ist $f(z)$ eine ungerade elliptische Funktion und Ω eine ihrer Perioden, so ist $\frac{1}{2}\Omega$ entweder eine Nullstelle oder ein Pol von $f(z)$, und zwar notwendig von ungerader Ordnung.

4. Auf welches Gebiet der w-Ebene wird das Fundamentalparallelogramm eines durch (ω, ω') bestimmten Parallelogrammnetzes der z-Ebene durch $w = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$ abgebildet? Und auf welches Gebiet der Streifen, der aus dem Fundamentalparallelogramm durch die Translationen $(k'\omega')$ entsteht?

5. Jede eindeutige Funktion $f(z)$ mit der primitiven Periode ω kann nach K II, § 8, Satz 1, als eindeutige Funktion $\varphi(\zeta)$ von $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z}$ aufgefaßt werden. Was bedeutet es dann für $\varphi(\zeta)$, wenn $f(z)$ eine doppelt-periodische Funktion mit dem primitiven Periodenpaar (ω, ω') ist?

6. Ist $e^{\wp(z)}$ eine elliptische Funktion?

*7. Ist ω positiv-reell und ω' positiv-imaginär, so ist $\wp(z \mid \frac{1}{2}\omega, \frac{1}{2}\omega')$ auf dem Rande des Fundamentalparallelogramms und auf dessen Mittellinien reell. Auf welches Gebiet der w-Ebene wird in diesem Falle das Fundamentalparallelogramm durch $w = \wp(z \mid \frac{1}{2}\omega, \frac{1}{2}\omega')$ abgebildet? Anl.: Man untersuche den Werteverlauf von $\wp(z)$ auf dem Rande des bei 0 liegenden Viertels des Fundamentalparallelogramms.

*8. Für die Summen

$$s_n = \sum_{k,k'}{}' \frac{1}{(k\omega + k'\omega')^n}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

beweise man die Relationen

a) $s_{2m+1} = 0$ für $m = 1, 2, 3, \ldots;$

b) $s_8 = \frac{3}{7} s_4^2.$

9. Die Funktion $w = \wp(z \mid \frac{1}{2}\omega, \frac{1}{2}\omega')$ genügt (s. K II, § 9, Satz 9) der Differentialgleichung

$$w'^2 = 4w^3 - g_2 w - g_3$$

mit $g_2 = 60 s_4$, $g_3 = 140 s_6$, wenn s_n die in Aufg. 8 angegebene Bedeutung hat. Man zeige, daß die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$4w^3 - g_2 w - g_3 = 0$$

die Werte $\wp(\frac{1}{2}\omega)$, $\wp(\frac{1}{2}\omega')$, $\wp\left(\frac{1}{2}(\omega + \omega')\right)$ haben und voneinander verschieden sind.

10. Im Anschluß an K II, § 9, Satz 10, und an Aufg. 2 zeige man, daß sich jede elliptische Funktion $f(z)$ als „σ-Quotient", d. h. mit Hilfe der zum gleichen Periodenparallelogramm gehörigen σ-Funktion in der Form

$$c\,\frac{\sigma(z - z_1)\,\sigma(z - z_2)\ldots\sigma(z - z_k)}{\sigma(z - \zeta_1)\,\sigma(z - \zeta_2)\ldots\sigma(z - \zeta_k)}$$

darstellen läßt.

V. Kapitel.

Analytische Fortsetzung.

§ 15. Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises.

1. Die Potenzreihe $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ habe den Radius $r = 1$, es sei $b_n > 0$ und $\sum b_n$ divergent und sie stehe zu der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in der Beziehung, daß $\frac{a_n}{b_n} \to g$ strebt. Dann gilt die Behauptung: $\sum a_n z^n$ hat einen Radius $r' \geqq 1$, und wenn z radial $\to +1$ strebt, so ist auch

$$\lim \frac{f(z)}{h(z)} = g.$$

*2. Gilt bzw. unter welchen zusätzlichen Bedingungen gilt der in der vorigen Aufgabe formulierte Satz auch noch, wenn sich die Variable wie bei I, § 11, Aufg. 9, in einem Dreieck $z_1 z_2 1$ bleibend, gegen $+1$ bewegt?

3. Mit Hilfe des in Aufg. 1 und 2 formulierten Satzes beweise man noch einmal den Abelschen Grenzwertsatz aus I, § 11, Aufg. 10, indem man $h(z) = \frac{1}{1-z}$ und $f(z) = \frac{1}{1-z} \sum a_n z^n = \sum s_n z^n$, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, setzt.

4. Mit Hilfe des in Aufg. 1 und 2 formulierten Satzes beweise man die folgende Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes: Haben die Koeffizienten der Potenzreihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Eigenschaft, daß, wenn $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_n$ gesetzt wird,

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \to s$$

strebt, so strebt auch $F(z) \to s$, falls z in einem Dreieck $z_1 z_2 1$ (vgl. Aufg. 2) gegen $+1$ rückt.

5. Wenn z radial (oder, wie bei Aufg. 2, innerhalb eines Dreiecks $z_1 z_2 1$) gegen $+1$ strebt, so strebt dabei

a) $(1 - z + z^4 - z^9 + z^{16} - + \cdots) \to \frac{1}{2}$,

b) $\sqrt{1-z}\,(1 + z + z^4 + z^9 + \cdots) \to \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

c) $\dfrac{1}{\log \dfrac{1}{1-z}}(z + z^p + z^{p^2} + z^{p^3} + \cdots) \to \dfrac{1}{\log p}$ $(p \geqq 2$, ganzzahlig$)$,

d) $(1-z)^{p+1}(z + 2^p z^2 + 3^p z^3 + \cdots) \to \Gamma(p+1)$
$(p > -1$, beliebig$)$.

6. Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ habe den Radius 1 und sei in $z = +1$ konvergent: $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_n \to s$. Ist diese Konvergenz so stark, daß noch $\sqrt{n}\cdot(s_n - s) \to 0$ strebt, so strebt (vgl. Aufg. 3) auch dann noch $f(z) \to s$, wenn z innerhalb der Ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \qquad (0 < \alpha < 1),$$

bleibend gegen $+1$ rückt.

7. Die beiden Reihen

$$f_1(z) = z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^8}{4} + + - \cdots$$

$$f_2(z) = z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^4}{4} + + - \cdots,$$

von denen die erste eine gewöhnliche Potenzreihe, die zweite dagegen eine Umordnung einer solchen ist, sind offenbar für $|z| < 1$ und für $z = +1$ konvergent. Welche Werte haben die Reihen in $z = +1$ und welche Grenzwerte haben die für $|z| < 1$ dargestellten Funktionen, wenn z radial $\to +1$ strebt?

*8. Läßt sich — in Verallgemeinerung der Frage in I, § 4, Aufg. 14 — eine Potenzreihe mit dem Radius 1 angeben, die in einer vorgeschriebenen abzählbaren Menge

von Randpunkten des Einheitskreises divergiert, in allen andern Randpunkten konvergiert? Ist dies wenigstens möglich, falls die vorgeschriebene Menge abgeschlossen ist?

9. Die Funktion $(1-z)\cdot\sin\left(\log\frac{1}{1-z}\right)$ läßt sich für $|z|<1$ in eine Potenzreihe entwickeln. Man zeige, daß diese Reihe für $|z|=1$ noch absolut konvergiert.

§ 16. Analytische Fortsetzung von Potenzreihen.

1. Es soll die Mehrdeutigkeit der durch die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

definierten Funktion dadurch festgestellt werden, daß man die Reihe im negativen Sinne um den Punkt $+1$ herum bis zur Rückkehr nach 0 gemäß K I, § 27, analytisch fortsetzt, — und zwar ohne irgendwelche Eigenschaften der durch $\mathfrak{P}(z)$ definierten Funktion als bekannt vorauszusetzen. (Vgl. K I, S. 109, Fig. 8). — Anl.: Die Punkte $z_1, z_2, \ldots$ wähle man auf dem Kreise $|z-1|=1$, und zwar in den Ecken des ihm einbeschriebenen regulären p-Ecks ($p \geqq 7$), dessen eine Ecke in 0 liegt. Es ist dann $z_\nu = 1 - e^{-\frac{2\nu\pi i}{p}}$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, und die nach p Schritten gewonnene Entwicklung um $z_p = 0$ unterscheidet sich nur dadurch von $\mathfrak{P}(z)$, daß eine Konstante additiv hinzugekommen ist. Daß diese $= 2\pi i$ ist, findet man sofort, indem man $p \to +\infty$ streben läßt.

2. Von der Potenzreihe $f(z)=\sum a_n z^n$ weiß man, daß die durch sie dargestellte Funktion $f(z)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises nur eine singuläre Stelle z_0 hat, und daß diese ein Pol erster Ordnung ist. Es soll gezeigt werden, daß dann

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \to z_0 \quad \text{und also} \quad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to r,$$

den Radius der Potenzreihe, strebt.

3. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$ habe den Radius 1. Man setze $z = \frac{\zeta}{1-\zeta}$, entwickle jedes Glied $a_n z^{n+1}$ nach Potenzen von ζ und ordne die entstehende Doppelreihe nach Potenzen von ζ zu der Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(\zeta)$. Wie lauten die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_1(\zeta)$ und welchen Wert hat demgemäß, d. h. nach dem Cauchy-Hadamardschen Satze, der Radius derselben? (Vgl. hierzu § 2, Aufg. 3b.) Wie läßt sich andrerseits der Radius von $\mathfrak{P}_1(\zeta)$ aus den analytischen Eigenschaften von $f(z)$ ablesen? Welchen Wert hat er daher mindestens und welchen Wert höchstens?

4. Wie lautet unter den Bedingungen der vorigen Aufgabe die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch $\mathfrak{P}(z)$ in $|z| < 1$ dargestellte Funktion $f(z)$ in $+1$ regulär ist?

5. Man zeige mit Hilfe der Betrachtungen der beiden vorangehenden Aufgaben, daß die durch die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n+1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

dargestellten Funktionen in $+1$ regulär sind.

6. Mit Hilfe des nach Aufg. 4 aufzustellenden Kriteriums beweise man noch einmal den Satz aus I, § 11, Aufg. 3.

7. Man erweitere den in der vorangehenden Aufgabe nochmals behandelten Satz aus I, § 11, Aufg. 3 zu dem folgenden Satz: Hat die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ den Radius 1 und liegen alle Koeffizienten a_n in einem (abgeschlossenen) Winkelraum mit dem Scheitel in 0 und einer Öffnung $< \pi$, so ist $z = +1$ eine singuläre Stelle für die dargestellte Funktion.

§ 17. Analytische Fortsetzung beliebig gegebener Funktionen.

1. Ist die reelle, in $-\infty < x < +\infty$ definierte Funktion $F(x) = \sqrt{x^2}$ ins Komplexe fortsetzbar?

2. Ist die reelle in $-1 < x < +1$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{,, } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion ins Komplexe fortsetzbar? (Man beachte, daß $f(x)$ in jedem Punkte des Definitionsintervalles stetige Ableitungen aller Ordnungen besitzt! Vgl. § 7, Aufg. 5.)

3. Bedeutet $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$ eine Folge positiver ganzer Zahlen, die sämtlich $\geqq 2$ sind, so stellt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{g_0 g_1 \cdots g_n}}{1 - z^{g_0 g_1 \cdots g_n}}$$

eine für $|z| < 1$ reguläre, aber über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbare Funktion $f(z)$ dar. (Vgl. I, § 11, Aufg. 4 und 5.)

4. Die Funktion $f(z)$ sei in einer Umgebung des Nullpunktes regulär und es sei dort

$$(*) \qquad f(2z) = 2f(z) \cdot f'(z).$$

Dann ist $f(z)$ über die ganze Ebene fortsetzbar, also eine ganze Funktion. (Vgl. $f(z) = \sin z$.) — Welche Eigenschaft der rechten Seite von (*) ist bei dieser Behauptung allein wesentlich?

5. Die Funktion $f(z)$ sei für $\Re(z) > 0$ regulär und genüge dort der Beziehung

$$(\dagger) \qquad f(z+1) = z f(z),$$

und es sei $f(1) \neq 0$. Dann ist $f(z)$ eine meromorphe Funktion, deren einzige Pole in $0, -1, -2, \ldots$ liegen und von der ersten Ordnung sind. — Welche Residuen hat dort $f(z)$? (Vgl. die Funktion $\Gamma(z)$.)

*6. Man beweise folgende Ergänzung des Riemannschen Satzes (K I, S. 131): Ist $f(z)$ in G stetig und, von den Punk-

ten eines in G gelegenen Streckenzuges $\mathfrak{w}$ etwa abgesehen, auch differenzierbar, so ist $f(z)$ notwendig auch in diesen Punkten regulär. (Die Endpunkte von $\mathfrak{w}$ dürfen auch auf dem Rande von G gelegen sein.)

7. Die beiden Gebiete G_1 und G_2 mögen längs des Streckenzuges $\mathfrak{w}$ zusammenstoßen, d. h. die Punkte von $\mathfrak{w}$ seien für beide Gebiete Randpunkte, im übrigen aber G_1 und G_2 ohne gemeinsamen Punkt. $f_1(z)$ sei in G_1, $f_2(z)$ in G_2 regulär. Wenn dann (vgl. I, § 5, Aufg. 8) f_1 und f_2 längs $\mathfrak{w}$ dieselben Randwerte annehmen, so sind sie voneinander analytische Fortsetzungen.

*8. Man beweise den in K II, S. 117, Fußnote, formulierten sog. Monodromiesatz: Ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet G und ein in der Umgebung eines Punktes z_0 desselben reguläres Funktionselement $f(z)$ gegeben, welches unbehindert über das Gebiet fortgesetzt werden kann, so erzeugt es eine dort eindeutige reguläre Funktion. (Vgl. dagegen das Verhalten des Elementes $\sum \frac{z^n}{n}$ in dem Kreisring $1 < |z - 2| < 3$ und das in der nächsten Aufgabe beschriebene Verhalten.)

9. Man zeige durch ein Beispiel: Wenn — bei der Situation der vorigen Aufgabe — $f(z)$ zwar nach jedem andern Punkte z_1 von G fortgesetzt werden kann, jedoch nicht längs jedes, sondern nur längs geeigneter Wege, so braucht die dadurch erzeugte Funktion in G nicht eindeutig und regulär zu sein.

10. Man erweitere den Monodromiesatz (Aufg. 8), indem man zeigt: Wenn $f(z)$ bei beliebiger Fortsetzung innerhalb G keine andern Singularitäten als Pole aufweist, so erzeugt $f(z)$ eine in G eindeutige und bis auf Pole dort reguläre Funktion.

11. Man erweitere den Monodromiesatz (Aufg. 8) endlich noch derart, daß man zeigt: Wenn $f(z)$ bis in beliebige Nähe

jedes Punktes ζ in G fortgesetzt werden kann und wenn die gewonnene Fortsetzung in $0 < |z - \zeta| < \delta$ für ein $\delta > 0$ eindeutig und regulär ist, so erzeugt $f(z)$ eine in G eindeutige und bis auf isolierte Stellen reguläre Funktion.

VI. Kapitel.

Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen.

§ 18. Mehrdeutige Funktionen im allgemeinen.

1. Kann eine Funktion in einem Gebiete überall regulär und doch nicht eindeutig sein? (Man beantworte die Frage für ein- und mehrfach zusammenhängende Gebiete.)

2. Kann eine mehrdeutige Funktion in zwei übereinanderliegenden Punkten ihrer Riemannschen Fläche denselben Wert haben? Kann sie es in unendlich vielen solchen Punkten? Kann sie in allen Punkten der Umgebung zweier solcher Punkte dieselben Werte haben?

3. Was für Funktionen (eindeutige oder mehrdeutige) werden durch die folgenden Formeln definiert:

a) $\sqrt{e^z}$; b) $\sqrt{\cos z}$; c) $\sqrt{1 - \sin^2 z}$;

d) $\sqrt{\wp(z) - \wp(\frac{1}{2}\omega)}$; e) $\sqrt{\wp(z)}$; f) $\log e^z$;

g) $\log \sin z$; h) $\dfrac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$?

4. Welche Werte kann das Integral $\int\limits_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ haben, wenn der in der schlichten z-Ebene verlaufende Weg in beliebiger Weise vom Punkte 0 unter Vermeidung der Punkte ± 1 zu einem bestimmten Punkte $z_0 (\neq \pm 1)$ führt? Dabei soll als Anfangswert der Wurzel (d. h. als ihr Wert im Anfangspunkte 0 des Weges) der Wert $+1$ genommen werden. — Haben diese Integrale noch für $z_0 = \pm 1$ oder

für $z_0 = \infty$ einen Sinn? (Anl.: Man benutze § 1, Aufg. 6, um die Wege auf einfachere zurückzuführen.)

5. Welchen Wert können die Integrale

$$\int_1^{z_0} \frac{dz}{\sqrt[p]{z}} \quad \text{und} \quad \int_1^{z_0} \log z\, dz$$

bei beliebigem Wege haben, falls dieser vom Punkte $+1$ eines bestimmten Blattes unter Vermeidung des Nullpunktes zum Punkte z_0 eines gewissen Blattes führt? ($p \geqq 1$, ganz.)

6. Es sei — vgl. hierzu I, § 11, Aufg. 4d —

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^n+2}}{(2^n+1)(2^n+2)}$$

und

$$F_1(z) = \sqrt{f(z)},$$

$$F_2(z) = \log f(z).$$

Man konstruiere die Riemannschen Flächen dieser Funktionen. (Anl.: Man beweise vorerst, daß in $|z| < 1$ für $z \neq 0$ auch $f(z) \neq 0$ ist.)

7. Es bedeute $f(z)$ dieselbe Funktion wie in der vorigen Aufgabe. Man konstruiere die Riemannschen Flächen der beiden Funktionen

$$G_1(z) = \log f\left(\frac{z}{2}\right) + \log f\left(\frac{1}{2z}\right)$$

und

$$G_2(z) = \log f\left(\frac{z}{2}\right) - \log f\left(\frac{1}{2z}\right).$$

§ 19. Spezielle mehrdeutige, insbesondere algebraische Funktionen.

1. Man konstruiere die Riemannschen Flächen für die folgenden Funktionen:

a) $\sqrt[3]{z-a}$; b) $\sqrt[3]{(z-a)^2}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{z-a}{z-b}}$;

d) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$; e) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)(z-c)}$;

f) $\sqrt[3]{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_k)}, \quad k > 3;$

g) $\sqrt[3]{\frac{(z-a)}{(z-b)^2}} + \sqrt{z-c};$ h) $\sqrt[n]{(z-a)(z-b)(z-c)}, \ n > 3.$

2. Man konstruiere die Riemannschen Flächen für die folgenden Funktionen:

a) $\log(z-a)$; b) $\log(z-a)(z-b)$;

c) $\log \frac{z-a}{z-b}$; d) $\log(1+z^2)$;

e) $\operatorname{arctg} z$.

3. Man veranschauliche sich die Riemannschen Flächen der Funktionen

$$z^i \quad \text{und} \quad z^{a+bi}.$$

*4. Man mache sich in allen Einzelheiten den Bau der Riemannschen Flächen (kritische Punkte, Zusammenhang der Blätter daselbst, Verhalten der Funktion in ihnen, Verteilung des Wertevorrats usw.) der durch die folgenden Gleichungen definierten algebraischen Funktionen w von z klar:

a) $w^3 - z - 1 = 0$; b) $w + \frac{1}{w} - z = 0$;

c) $w^n + \frac{1}{w^n} - z = 0$; d) $w^3 - 3w - z = 0$;

e) $w^3 + 3w - z = 0$.

VII. Kapitel.

Konforme Abbildung.

§ 20. Begriff und allgemeine Theorie.

1. Es sei $f(z)$ für $|z - z_0| < r$ regulär; es sei $|z_1 - z_0| < r$, $z_1 \neq z_0$, $f(z_0) = w_0$, $f(z_1) = w_1$. Um welchen Winkel erscheint die Strecke $\overline{w_0 w_1}$ gegen die Strecke $\overline{z_0 z_1}$ gedreht? In welchem Verhältnis erscheint sie gestreckt?

2. Es habe $f(z)$ in z_0 einen Pol. Wann kann die Abbildung der Umgebung von z_0 (einschließlich dieses Punktes) durch $w = f(z)$ auf die Umgebung des Punktes $w_0 = \infty$ konform genannt werden? Wie liegen die Dinge, wenn auch $z_0 = \infty$ ist? Und wie, wenn $z_0 = \infty$, aber w_0 im Endlichen gelegen ist?

*3. Die Funktion $f(z)$ sei längs des geschlossenen doppelpunktfreien Weges C und in dem von C umschlossenen Gebiete G regulär. Durch $w = f(z)$ werde C auf den geschlossenen doppelpunktfreien Weg C' ein-eindeutig abgebildet (so daß, wenn z den Weg C einmal im positiven Sinne durchwandert, der Bildpunkt w den Weg C' auch einmal in bestimmtem Sinne durchläuft). Dann wird das abgeschlossene Gebiet G ein-eindeutig und konform auf das abgeschlossene, von C' umschlossene Gebiet G' abgebildet.

4. Gilt der in der vorigen Aufgabe ausgesprochene Satz auch noch, falls die Kurve C' durch ∞ hindurchgeht? Wie hat man dabei die bisher vorausgesetzte Regularität von $f(z)$ längs C zu formulieren? Gilt der Satz schließlich auch noch, falls C durch ∞ hindurchgeht?

5. Der beschränkte Weg L liege einschließlich seiner Endpunkte im Regularitätsbereich der Funktion $w = f(z)$; es sei L' das Bild von L in der w-Ebene. Ist L' wieder ein Weg? Welche Länge hat L'?

6. Es sei $f(z)$ für $|z| < r$ regulär und $0 < \varrho < r$. Welchen Flächeninhalt $J(\varrho)$ hat das Bild K' der Kreisscheibe K mit ϱ um 0? Gilt die herzuleitende Formel auch noch, falls die Abbildung von K auf K' keine umkehrbar eindeutige ist, falls also $f'(z)$ auf K Nullstellen besitzt und K' somit mehrblättrig ist?

7. Welchen Grenzwert hat unter den Bedingungen der vorigen Aufgabe das Verhältnis der Flächen K' und K für $\varrho \to 0$? Bleibt die Antwort auch richtig, falls $f'(0) = 0$ ist? (Flächenhaftes Vergrößerungsverhältnis.)

8. Die Funktion $w = f(z)$ sei in $|z| \leqq r$ regulär. Man bestimme

a) die Länge der Bildkurve der Peripherie $|z| = r$;

b) die Fläche des Bildes der Kreisscheibe $|z| \leqq r$;

c) die Richtung der Tangente der Bildkurve von $|z| = r$ in einem Punkte $w = f(z)$, für den $f'(z) \neq 0$ ist;

d) die Krümmung der Bildkurve von $|z| = r$ in einem Punkte $w = f(z)$, für den $f'(z) \neq 0$ ist.

9. Wie ändern sich die Antworten auf die Fragen a) bis d) der vorigen Aufgabe, wenn $f(z)$ für $|z| \geqq r$, einschließlich $z = \infty$, regulär ist?

*10. Es sei $w = \varphi(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, die das Innere des Einheitskreises ein-eindeutig auf das Gebiet G der w-Ebene abbildet. Es sei $\varphi(0) = w_0$ und $\overline{G}_\varrho$ das Bild des Kreises $|z| \leqq \varrho < 1$. Ist dann $w = f(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion, deren dortige Werte w in G liegen und ist insbesondere $f(0) = w_0$, so liegt für $|z| \leqq \varrho$ der Punkt $f(z) = w$ in $\overline{G}_\varrho$ und sogar sicher im Innern dieses Gebietes, es sei denn, daß $f(z) = \varphi(e^{i\alpha} z)$, α fest, ist. [Anl.: Ist $z = \Phi(w)$ die zu $w = \varphi(z)$ inverse Funktion, so wende man das Schwarzsche Lemma, Bi S. 33, auf $\Phi(f(z))$ an.]

11. Wenn $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär ist und wenn dort $\Re f(z) > 0$ ist, so ist, wenn noch $f(0) = w_0 = u_0 + i v_0$ gesetzt wird, in $|z| \leqq \varrho < 1$ sogar

$$u_0 \frac{1-\varrho}{1+\varrho} \leqq \Re f(z) \leqq u_0 \frac{1+\varrho}{1-\varrho}.$$

[Anl.: Man nehme in der vorigen Aufgabe für G die rechte Halbebene $\Re(w) > 0$.]

12. Was läßt sich unter den Bedingungen der vorigen Aufgabe über $\Im f(z)$ und $|f(z)|$ aussagen?

13. Die im Einheitskreis reguläre Funktion $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ ist dort sicher schlicht, falls

$$2|a_2| + 3|a_3| + \cdots \leqq |a_1| \quad \text{ist.}$$

*14. Den Limessatz über schlichte Abbildungen (Bi, § 17) beweise man ohne nochmalige Benutzung der Cauchyschen Integralformel mit Hilfe des in § 5, Aufg. 4, formulierten Satzes über Nullstellen.

15. Die in Bi, S. 114, bewiesene Ungleichung

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

läßt sich, falls von $f(z)$ noch vorausgesetzt wird, daß es eine ungerade Funktion ist ($f(z) = -f(-z)$) dadurch verschärfen, daß die Nenner links und rechts durch $(1+|z|^2)$ bzw. $(1-|z|^2)$ ersetzt werden. [Anl.: Man zeige, daß $(f(z))^2$ eine schlichte Funktion von $z^2 = \zeta$ ist und wende auf diese die obige Ungleichung an.]

16. Wenn ein Gebiet G der z-Ebene ein-eindeutig, konform und so auf einen Kreis um 0 in der w-Ebene abgebildet werden soll, daß dabei ein bestimmter Punkt a von G nach $w = 0$ kommt und daß in diesem Punkte das lineare Vergrößerungsverhältnis $= +1$ ist, so ist hierdurch der Radius $r = r(G; a)$ des Bildkreises in der w-Ebene eindeutig bestimmt.

§ 21. Spezielle Abbildungsaufgaben.

1. Im Anschluß an I, § 12, Aufg. 20 erörtere man das folgende Schließungsproblem: Es seien $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Kreise, die im Zwischengebiet von K_1 und K_2 liegen, d. h. im Durchschnitt der Außengebiete beider Kreise, falls man als Äußeres eines jeden der Kreise den Teil der Ebene bezeichnet, in dem der andere Kreis liegt. Dabei ist k_1 dort beliebig gewählt, doch so, daß K_1 und K_2 von k_1 berührt werden und in ein und demselben der durch k_1 bestimmten Gebiete liegen, welches wir wieder als das Äußere von k_1 ansehen. Die folgenden Kreise k_ν, $\nu = 2, 3, \ldots$ seien dann dadurch festgelegt, daß k_ν die Kreise K_1, K_2

und $k_{\nu-1}$ berührt und daß diese drei Kreise in ein und demselben der durch k_ν bestimmten Gebiete (seinem „Äußeren“) liegen. Hierbei bestehen für k_2 noch zwei Möglichkeiten; für $\nu \geqq 3$ ist k_ν durch die Forderung, von $k_{\nu-2}$ verschieden zu sein, eindeutig festgelegt. Es wird behauptet, daß man dabei immer (d. h. wie man auch erst k_1 und dann k_2 wählen möge) oder niemals auf unendlich viele verschiedene Kreise k_ν geführt wird. Und im letzteren Falle „schließt“ sich die Kette der Kreise k_ν stets nach derselben Anzahl von Gliedern.

2. Der in der vorigen Aufgabe genannte Kreis K_1 habe den Mittelpunkt $z_1 = \frac{17}{21} - \frac{i}{7}$ und den Radius $r_1 = \frac{8}{15}$ und K_2 habe den Mittelpunkt $z_2 = \frac{69}{25} + \frac{33}{25}\, i$ und den Radius $r_2 = \frac{24}{7}$. Man entscheide, ob sich hier, und evtl. nach wieviel Gliedern, die in der vorigen Aufgabe genannte Kette schließt oder nicht.

3. Wird auf z mehrmals dieselbe (nicht konstante) lineare Transformation angewendet, setzt man also

$$\frac{az+b}{cz+d} = z', \qquad \frac{az'+b}{cz'+d} = z'', \qquad \frac{az''+b}{cz''+d} = z''', \ldots$$

so ist jedes $z^{(n)}$ eine lineare Funktion von z:

$$(L_n) \qquad z^{(n)} = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}.$$

Man zeige, daß für jedes n

$$\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \frac{a_n - d_n}{a - d}$$

ist und charakterisiere die durch (L_n) vermittelte Abbildung.

4. Man zeige, daß die in I, § 12, Aufg. 6—9 behandelte stereographische Projektion eine konforme Abbildung von Ebene und Kugel aufeinander vermittelt.

5. Die sog. Mercator-Projektion ordnet dem Punkte P der (Erd-)Kugel mit den geographischen Koordinaten λ (Länge) und β (Breite) den Punkt P' einer xy-Ebene mit den (kartesischen) Koordinaten $x = R\lambda$, $y = R \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)$ zu; $-\pi < \lambda \leqq +\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < +\frac{\pi}{2}$. Man zeige, daß diese Mercator-Projektion eine konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene vermittelt ($R =$ Radius der Kugel).

6. Es soll die von $-\frac{1}{4}$ längs der negativ-reellen Achse nach $-\infty$ aufgeschnittene Ebene so auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden, daß der Nullpunkt und die von ihm ausgehenden Richtungen fest bleiben.

7. Man untersuche die Abbildung, welche die durch

$$aw^2 + bw + c = z \qquad (a \neq 0)$$

definierte Funktion $w = f(z)$ von der z-Ebene vermittelt.

8. Das einfach zusammenhängende Gebiet, das alle Punkte der Ebene (einschließlich ∞) enthält mit Ausnahme der reellen Punkte z in $-2 \leqq z \leqq +2$, soll auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden.

9. Das Außengebiet der Kardioide

$$\begin{cases} x = 2a(1 - \cos t)\cos t, \\ y = 2a(1 - \cos t)\sin t, \end{cases} \qquad t = 0 \ldots 2\pi,\ a > 0,$$

soll konform auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden. [Anl.: Man spiegele die Kardioide am Einheitskreise.]

10. Das Rechteck, dessen Ecken in den Punkten $\pm 2 \pm i$ liegen, soll auf den Einheitskreis abgebildet werden. (Vgl. hierzu § 14, Aufg. 7.)

*11. Das gleichseitige Dreieck, dessen Ecken in den Punkten $0, 1, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ liegen, soll auf die obere Halb-

ebene abgebildet werden. [Anl.: Man führe für das Integral $\int_0^z t^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt$ Betrachtungen durch analog denen in Bi, § 14.]

*12. Die Integrale

$$w = f_1(z) = \int_0^z \frac{t\,dt}{t^3-1} \qquad \text{und} \qquad f_2(z) = \int_0^z \frac{dt}{t^3-1}$$

sind unendlich vieldeutig. Es soll durch geeignete Zerschneidung der Ebene ein eindeutiger Zweig abgetrennt werden und die Abbildung untersucht werden, die dann von der aufgeschnittenen Ebene durch diesen Zweig vermittelt wird. Die Zerschneidung ist so einzurichten, daß das Bild einen schlichten (einblättrigen) Bereich ergibt.

13. Der Radius $r = r(G; a)$ soll im Anschluß an § 20, Aufgabe 16, bestimmt werden, wenn G das Gebiet ist, das zwischen der Hyperbel $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$ und den positiven Koordinatenachsen gelegen ist, und wenn $a = \alpha + \frac{i}{2\alpha}$, $\alpha > 0$, ist.

14. Im Anschluß an § 20, Aufg. 16, denke man sich in jedem Punkte a von G ein Lot von der Länge $r(G; a)$ errichtet. Was für eine Fläche bilden die Endpunkte dieser Lote, wenn G

a) der Kreis $|z - z_0| < R$,
b) die Halbebene $\mathfrak{J}(z) > 0$,
c) der Streifen $0 < \mathfrak{J}(z) < \pi$,
d) das in der vorigen Aufgabe genannte Gebiet ist?

Zweiter Teil.

Lösungen.

I. Kapitel.

Einige weitere Aufgaben zu den Gegenständen der ersten fünf Kapitel (§§ 1—10) des I. Teiles der Aufgabensammlung.

§ 1. Grundlegende Begriffe.

1. Die Behauptung besagt, daß jede (abgeschlossene) Halbebene $\mathfrak{H}$, die $z_1, z_2, \ldots, z_k$ enthält, auch ζ enthält. Ist $\mathfrak{H}$ die Halbebene $\Re(z) \geqq 0$, so ist $\Re(z_\nu) \geqq 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, und also auch $\Re(\zeta) \geqq 0$, die Behauptung also richtig. Jede andre Halbebene $\mathfrak{H}'$ kann durch eine Translation und eine Drehung zur rechten Halbebene gemacht werden, d. h. es kann a und α (α reell) so gewählt werden, daß $\Re e^{i\alpha}(z_\nu - a) \geqq 0$ ist, $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Dann ist nach dem vorigen, da $\sum a_\nu = 1$, auch $\Re e^{i\alpha}(\zeta - a) \geqq 0$, so daß ζ selbst in $\mathfrak{H}'$ liegen muß. — Die Erweiterung auf unendliche Folgen ist evident.

2. Setzt man $\dfrac{1}{\zeta - z_\nu} = z'_\nu$, so ist $\alpha_1 z'_1 + \cdots + \alpha_k z'_k = 0$. Dies besagt, daß $\Re(z'_\nu)$ und also auch $\Re\left(\dfrac{1}{z'_\nu}\right)$ für $\nu = 1, 2, \ldots, k$ entweder positive und negative Werte hat oder dauernd $= 0$ ist. Multipliziert man die obige Gleichung mit $e^{i\alpha}$ (α reell), so erkennt man: Jede Gerade durch 0 trennt entweder die Punkte $\dfrac{1}{z'_\nu}$ oder enthält sie sämtlich.

Führt man noch die Translation (ζ) aus, so sieht man: Jede Gerade durch ζ enthält entweder alle Punkte z_ν oder hat zu ihren beiden Seiten mindestens je einen liegen. Also kann ζ nicht außerhalb des in Rede stehenden Polygons liegen.

3. Ist $G'(\zeta) = 0$, so ist auch

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} = \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_1}{\zeta - z_1} + \frac{\alpha_2}{\zeta - z_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{\zeta - z_k} \right) = 0 .$$

Hierbei ist $G(z) = c(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$ gesetzt. Aufg. 2 vollendet den Beweis.

4. a) Da sich zwei verschiedene lineare Transformationen, die beide z_ν nach ∞ werfen, nur um eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden, die an der Eckenzahl a_ν nichts ändert, so dürfen spezielle Transformationen benutzt werden. Dazu gehe man durch stereographische Projektion zur Zahlenkugel über und bringe z_ν durch eine Drehung nach ∞. Das Polygon π_ν wird nun ersichtlich aus ∞ durch eine a_ν-kantige körperliche Ecke projiziert. Da die Drehung an den gestaltlichen Verhältnissen nichts ändert, so erkennt man, daß $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ die doppelte Kantenanzahl des durch die Punkte z_ν (auf der Kugel) bestimmten n-eckigen konvexen Polyeders ist. Bezeichnet man mit k die Anzahl seiner Kanten, mit f die seiner Flächen, so ist $2k = 3f$, weil alle Seitenflächen Dreiecke sind (denn keine 4 der z_ν liegen auf einem Kreise). Nach dem Eulerschen Polyedersatz ist $n + f = k + 2$. Aus beidem folgt die Behauptung $2k = a_1 + \cdots + a_n = 6(n - 2)$.

b) Mit a) ist es nicht verträglich, daß jedes $a_\nu \geqq 6$ ist.

c) und d) Bezeichnet x_p die Anzahl der p-Ecke unter den π_ν, so ist neben

$$x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} = n$$

nach a) noch

$$3x_3 + 4x_4 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = 6(n-2).$$

Durch Subtraktion der mit 6 multiplizierten ersten Gleichung von der zweiten folgt, daß

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 \geqq 12$$

ist, woraus beide Behauptungen abzulesen sind.

5. Von den $\binom{n}{3}$ Ebenen, die durch je 3 Ecken des bei der vorigen Aufgabe besprochenen Polyeders bestimmt sind, haben die $f = 2(n-2)$ Seitenflächen und nur diese die Eigenschaft, daß die $n-3$ übrigen Ecken sämtlich in nur einer der beiden durch die Ebene bestimmten Kugelkalotten liegen. Überträgt man dies in die Zahlen*ebene*, so ergibt sich die Behauptung.

6. Man beginne die Durchlaufung von $\mathfrak{p}$ bei einem beliebigen Punkte A_0 desselben, bis man zum ersten Male an einen schon durchlaufenen Punkt A_1 kommt, der $= A_0$ oder davon verschieden sein kann. Der dabei von A_1 bis zurück nach A_1 durchlaufene Streckenzug bildet ein erstes sich selbst nicht überschneidendes, geschlossenes Polygon $\mathfrak{p}_1$. Dieses denke man sich ausgelöscht. Mit den restierenden Streckenzügen (es kann ein Zerfall eingetreten sein) wiederhole man dieselbe Operation usw. Da an jedem Punkte, in dem sich Streckenzüge schneiden, ebenso viele Wege einmünden, wie fortführen, so kann das Verfahren nur aufhören, wenn $\mathfrak{p}$ in lauter doppelpunktfreie, geschlossene Polygone $\mathfrak{p}_\nu$ aufgeteilt ist. (Hierbei ist stillschweigend angenommen, daß keine Strecke von $\mathfrak{p}$ oder ein Teil einer solchen zweimal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird; doch können solche Strecken auch als ausgeartete Polygone angesehen werden.)

§ 2. Zahlenfolgen und unendliche Reihen.

1. Da $\lim_{n\to\infty}(b_0 - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ und also $\lim b_n$ existiert, ist (b_n) beschränkt. Ist etwa stets $|b_n| < K$, so ist

$$|b_n^q - b_{n+1}^q| = |b_n - b_{n+1}| \cdot |b_n^{q-1} + b_n^{q-2} b_{n+1} + \cdots + b_{n+1}^{q-1}|$$
$$\leqq q \cdot K^{q-1} \cdot |b_n - b_{n+1}|;$$

also ist $\sum |b_n^q - b_{n+1}^q|$ konvergent. I, § 3, Aufg. 12 vollendet jetzt den Beweis.

2. a) und b) Es sei $\sum a_n$ absolut und $\sum b_n$ wenigstens bedingt konvergent. Die Teilsummen der drei Reihen seien A_n, B_n, C_n, ihre Summen A, B und — falls vorhanden — C. Dann ist $C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0$. Setzt man nun $B_n = B + \beta_n$, so daß $\beta_n \to 0$, so ist

$$C_n = A_n \cdot B + (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0),$$

was nach I, § 3, Aufg. 9, gegen $A \cdot B$ strebt.

c) Es ist

$$\frac{C_0 + C_1 + \cdots + C_n}{n+1} = \frac{A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \cdots + A_n B_0}{n+1}.$$

Nach I, § 3, Aufg. 2 strebt die linke Seite $\to C$, nach I, § 3, Aufg. 7b die rechte $\to AB$. Also ist $AB = C$.

3. Da $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = s_n \to s$ strebt, so strebt nach I, § 3, Aufg. 2 bzw. 8 auch

a) $s_n' = \dfrac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \to s$ und

b) $s_n'' = \dfrac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n+1}{1} s_0 + \binom{n+1}{2} s_1 + \cdots + \binom{n+1}{n+1} s_n\right] \to s.$

Das sind aber genau die Behauptungen[1]).

---

[1]) Es ist

$$\frac{1}{2^{\nu+1}}\binom{\nu}{\nu} + \frac{1}{2^{\nu+2}}\binom{\nu+1}{\nu} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\binom{n}{\nu} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\binom{n+1}{\nu+1} + \cdots + \binom{n+1}{n+1}\right).$$

4. Die Folge $(n^{-i\alpha})$ ist offenbar für jedes reelle $\alpha \neq 0$ divergent; also divergiert auch die Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_n$ mit $a_1 = 1$, $a_n = n^{-i\alpha} - (n-1)^{-i\alpha}$ für $n \geqq 2$. Nun ist aber

$$a_n = n^{-i\alpha}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-i\alpha}\right] = n^{-i\alpha}\left[-\frac{i\alpha}{n} + \frac{r_n}{n^2}\right],$$

wobei r_n eine beschränkte Zahlenfolge bedeutet $\left(\text{denn es strebt } r_n \to -\binom{-i\alpha}{2}\right)$. Es ist also

$$a_n = -i\alpha\frac{1}{n^{1+i\alpha}} + \frac{r_n}{n^{2+i\alpha}},$$

woraus die Behauptung abgelesen werden kann.

5. Die Lösung der vorigen Aufgabe hat gezeigt, daß für $\alpha \neq 0$ die Reihe $\sum \frac{1}{n^{1+i\alpha}}$ jedenfalls beschränkte Teilsummen hat. Nach I, § 3, Aufg. 13a ist die neue Reihe dann sicher konvergent.

6. Es ist

$$1 - \binom{z}{1} + \binom{z}{2} = 1 - z + \frac{z(z-1)}{1\cdot 2} = (1-z)\left(1 - \frac{z}{2}\right)$$

und allgemein

$$1 - \binom{z}{1} + \binom{z}{2} - + \cdots + (-1)^n\binom{z}{n} = (1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right).$$

Nun kann $1 - \frac{z}{k} = e^{-\frac{z}{k} + \frac{A_k}{k^2}}$ mit (bei festem z) beschränkten A_k gesetzt werden. Von einem konvergenten Faktor mit von 0 verschiedenem Grenzwerte abgesehen, verhält sich also die Folge der Teilsummen unserer Reihe wie die Folge der Zahlen

$$e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

und ist also für ein $z \neq 0$ dann und nur dann konvergent, und zwar mit dem Grenzwerte 0, wenn $\Re(z) > 0$ ist.

7. Wird $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{1-z^n} = f(z)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = g(z)$ gesetzt, so ist wegen $\frac{z^n}{1-z^n} = z^n + z^{2n} + \cdots + z^{kn} + \cdots$ zunächst $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(z^k)$. Setzt man der Reihe nach

$$a_n = (-1)^{n-1}, \quad = n, \quad = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad = x^n,$$

so ergeben sich die Identitäten a) bis d). — Daß die in Rede stehenden Reihen für $|z| \leqq \varrho < 1$ gleichmäßig konvergieren, folgt aus I, § 9, Aufg. 1 f, daß die vollzogenen Umordnungen erlaubt sind, aus K I, S. 89.

8. Man darf $\beta = 1$, $r > 1$ annehmen (Beweis?). Setzt man dann $b_n / b_{n+1} = 1 + \varepsilon_n$, so strebt $\varepsilon_n \to 0$. Ferner wird

$$\begin{aligned} &\left| \frac{c_{n+1}}{b_{n+1}} - f(1) \right| \\ &\quad \leqq |a_1 \varepsilon_n| + |a_2| \{(1+|\varepsilon_n|)(1+|\varepsilon_{n-1}|) - 1\} + \cdots \\ &\quad + |a_{n+1}| \{(1+|\varepsilon_n|) \ldots (1+|\varepsilon_0|) - 1\} + \sum_{\nu=n+2}^{\infty} |a_\nu|. \end{aligned}$$

Wird nun r_1 in $1 < r_1 < r$ fest gewählt und m so festgelegt, daß $1 + |\varepsilon_\nu| < r_1$ für $\nu > m$, so ist der obige Ausdruck für $n > p > m$

$$\begin{aligned} &\leqq \sum_{\nu=0}^{p} |a_{\nu+1}| \{(1+|\varepsilon_n|) \ldots (1+|\varepsilon_{n-\nu}|) - 1\} \\ &\qquad + (1+|\varepsilon_0|) \ldots (1+|\varepsilon_m|) \sum_{\nu=p+2}^{\infty} |a_\nu| \, r_1^\nu. \end{aligned}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man zunächst p so bestimmen, daß hier der zweite Summand $< \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, und hierauf $n > p$, so daß auch der erste Summand $< \frac{1}{2}\varepsilon$ ausfällt.

9. Da die Gleichung $\zeta = \alpha \zeta + \frac{\beta}{\zeta}$ nur die Lösungen ± 1 hat, so kommen als etwaige Grenzwerte nur diese beiden Punkte in Betracht. Ist nun zunächst $\Re(z_0) = 0$, so ist auch $\Re\left(\frac{1}{z_0}\right)$ und also auch $\Re(z_1) = 0$. Die Punkte $z_0, z_1, \ldots$

bleiben also auf der Achse des Imaginären, können daher nicht $\rightarrow \pm 1$ streben, so daß die Folge (z_n) divergieren muß.

Da für $\Re(z_0) < 0$ die Verhältnisse ebenso liegen wie für $\Re(z_0) > 0$, so genügt es, weiterhin $\Re(z_0) > 0$ vorauszusetzen. Wir führen dann die Schar S der Kreise ein, deren Mittelpunkte auf der positiven Achse des Reellen liegen und den Einheitskreis orthogonal schneiden. Liegt z auf dem Rande des Kreises K von S, so liegt dort auch $\frac{1}{z}$ und folglich liegt $z' = \alpha z + \frac{\beta}{z}$ in seinem Innern. Liegt also z_0 in K_0, so liegen dort auch alle übrigen Punkte der Folge (z_n). Wir zeigen nun, daß ein von $+1$ verschiedener Punkt ζ der rechten Halbebene nicht Häufungspunkt der Folge (z_n) sein kann. Denn strebt $z \rightarrow \zeta$, so strebt $z' = \alpha z + \frac{\beta}{z}$ gegen $\zeta' = \alpha \zeta + \frac{\beta}{\zeta}$. Man könnte daher um ζ einen so kleinen Kreis C beschreiben, daß er $+1$ nicht enthält und daß für alle z desselben das zugehörige z' in demjenigen Kreis K der Schar S liegt, der C von außen berührt. Liegt also z_p in C, so liegt z_{p+1} und folglich auch z_{p+2}, $z_{p+3}, \ldots$ in K. Daher kann ζ nicht Häufungspunkt von (z_n) sein. Also strebt $z_n \rightarrow +1$.

10. Es genügt, zu zeigen, daß jede Halbebene $\mathfrak{H}$, die alle ζ enthält, auch alle ζ' enthält. Dazu betrachte man noch die Halbebenen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$, die um Parallelstreifen von der Breite ε, 2ε und 3ε $(\varepsilon > 0)$ über $\mathfrak{H}$ hinausragen. Man wähle p so, daß für $\nu > p$ die z_ν in $\mathfrak{H}_1$ liegen, und setze für $n > p$

$$z''_n = a_{n\,p+1} z_{p+1} + \cdots + a_{nn} z_n,$$

so daß $z'_n - z''_n \rightarrow 0$ strebt. Nach § 1, Aufg. 1, liegt

$$\frac{z''_n}{a_{n\,p+1} + \cdots + a_{nn}} \text{ ebenfalls in } \mathfrak{H}_1 \text{ für } n > p.$$

Da der Nenner $\rightarrow +1$ strebt, so liegt z''_n für $n > p_1 > p$ in $\mathfrak{H}_2$, also z'_n, wegen $z'_n - z''_n \rightarrow 0$, für $n > N$ in $\mathfrak{H}_3$. Also kann außerhalb $\mathfrak{H}_3$ kein ζ' liegen. Also auch nicht

außerhalb $\mathfrak{H}$, da ein solcher Punkt für hinreichend kleines ε auch außerhalb $\mathfrak{H}_3$ läge.

§ 3. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

1. a) Ja. Beispiel: $f(z) = |z|^2$ in 0; $\left|\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right| = |z| \to 0$. In andern Punkten ist $|z|^2$ offenbar nicht differenzierbar.

b) Ja. Beispiel: $f(z) = (\mathfrak{J}(z))^2$. Denn ist $z = x + iy$ und ist $z_0 = x_0$ reell, so strebt für $z \to z_0$

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{y^2}{|(x-x_0)+iy|} \leqq |y| \to 0.$$

In nicht-reellen Punkten ist $f(z)$ offenbar nicht differenzierbar.

2. Ja. Beispiel: $f(z) = f(x+iy)$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } y \text{ irrational}, \ = 1, \text{ falls } y = 0 \text{ ist}, \\ \frac{1}{q^3}, & \text{falls } y = \frac{p}{q} \ (p, q \text{ ganz und teilerfremd}, p \neq 0, q > 0). \end{cases}$$

In den Punkten mit rationaler Ordinate ist $f(z)$ unstetig, also gewiß nicht differenzierbar. Hat aber $z_0 = x_0 + iy_0$ eine irrationale Ordinate, so ist

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leqq \frac{1}{q^3} \cdot \frac{1}{\left|\frac{p}{q} - y_0\right|} \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\mathfrak{J}(z) = y$ gleich $\frac{p}{q}$ oder irrational ist. Ist nun y_0 Wurzel einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, so ist bekanntlich[1]) für jedes $\frac{p}{q}$ stets

$$\left|\frac{p}{q} - y_0\right| \geqq \frac{c}{q^2}, \qquad (c > 0 \text{ nur von } y_0 \text{ abhängig}).$$

[1]) Hat $\varphi(y) = ky^2 + my + n$ (k, m, n ganzzahlig, reell) die irrationalen (reellen) Wurzeln y_0 und y_1, so ist zunächst

$$\left|\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|k\left(\frac{p}{q} - y_0\right)\left(\frac{p}{q} - y_1\right)\right| \geqq \frac{1}{q^2}.$$

Hieraus folgt (Beweis?), daß für ein passendes, nur von k, m, n abhängiges $c > 0$

$$\left|\frac{p}{q} - y_0\right| \geqq \frac{c}{q^2} \qquad \text{ist.}$$

Also strebt für $z \to z_0$ der Differenzenquotient $\to 0$. Die Punkte z_0 mit einem y_0 der betrachteten Art liegen aber überall dicht in der Ebene (Beweis?).

3. Nein, außer wenn die Funktion sich auf eine Konstante reduziert. Denn ist in $f(z) = u + iv$ etwa v in G_1 konstant, so muß dort nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auch u konstant sein. Also ist $f(z)$ überhaupt konstant. Analog für u. — Durch Betrachtung von $\log f(z)$ führt man die weiteren Fragen auf die eben behandelte zurück.

4. Ist M eine Schranke für $|f'(z)|$ in $|z| < 1$ und $\varepsilon > 0$, so ist für zwei innere Punkte z' und z'' des Einheitskreises, die von einem Punkte ζ mit $|\zeta| \leqq 1$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2M}$ entfernt sind,

$$|f(z'') - f(z')| = \left|\int_{z'}^{z''} f'(z)\,dz\right| \leqq M \cdot |z'' - z'| < \varepsilon.$$

Damit sind die Voraussetzungen von I, § 5, Aufg. 8, erfüllt. Das Weitere ist daher durch I, § 5, Aufg. 8 und 9 beantwortet.

5. Setzt man $\sqrt{x + iy} = u + iv$, so ist

$$\left.\begin{aligned} u^2 - v^2 &= x \\ 2uv &= y \end{aligned}\right\}, \text{ also } u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\geqq 0 \text{ zu nehmen!}).$$

Hiernach ist $u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2} + x)}$ und v gleich demjenigen der beiden Werte $\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2} - x)}$, für den uv das Vorzeichen von y hat (wegen $2uv = y$). Für $y = 0$ darf $\operatorname{sign} y$ beliebig $= +1$ oder $= -1$ gesetzt werden.

6. Für nicht ganzzahlig-reelle Exponenten ist e^z durch die Reihensumme eindeutig definiert, während für $a \neq e$ die Potenz a^z mehrdeutig ist. Speziell ist $e^{\frac{1}{2}}$ eindeutig, $(2e)^{\frac{1}{2}}$ zweideutig.

7. a) Setzt man $z-1=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ mit $\frac{\pi}{2}<|\varphi|\leqq\pi$, so ist

$$f(z)=e^{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2}=e^{\frac{1}{\varrho^2}(\cos 2\varphi-i\sin 2\varphi)}.$$

Ist also $\frac{3}{4}\pi<|\varphi|\leqq\pi$, so strebt $f(z)\to\infty$, ist $\frac{\pi}{2}<|\varphi|<\frac{3}{4}\pi$, so strebt $f(z)\to 0$. Für $\varphi=\pm\frac{3}{4}\pi$ hat man unbestimmte Divergenz.

b) Für $z=\cos t+i\sin t$ ist $\left(\frac{1}{1-z}\right)^2=\frac{1}{4}\left[1-\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}+2i\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right]$; $t\neq 2k\pi$. Also strebt $f(z)\to 0$.

8. a) Mit $z=re^{i\varphi}$, $-\pi<\varphi\leqq+\pi$ ist

$$z^a=r^a\cdot e^{ia\varphi+2ka\pi i},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Hier steht dann und nur dann ein eindeutig bestimmter Wert, wenn ka für $k=0,\pm 1,\ldots$ ganzzahlig ist, was ersichtlich nur für ganzzahlige a der Fall ist.

b) Für $z=re^{i\varphi}$, $-\pi<\varphi\leqq+\pi$ ist der Hauptwert

$$z^i=e^{-\varphi+i\log r},\quad |z^i|=e^{-\varphi}<e^{\pi}.$$

9. Es ist der in Rede stehende Zweig von

$$(1-z)^i=e^{i\log(1-z)},\quad |(1-z)^i|=e^{-\operatorname{arc}(1-z)},$$

wenn für den log bzw. den arc der Hauptwert genommen wird. Für diesen gilt aber in $|z|<1$

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc}(1-z)<+\frac{\pi}{2}.$$

10. Liegt $z=re^{i\varphi}$ in der rechten Halbebene, so ist

$$\log z=\log r+i\varphi\quad\text{mit}\quad -\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq+\frac{\pi}{2}$$

und $$\log^2 z=(2\varphi\log r)\,i-\vartheta,\ \text{mit reellem}\ \vartheta.$$

Also ist $e^{-i\log^2 z}=r^{2\varphi}\cdot e^{i\vartheta}$,

$$z^3e^{-i\log^2 z}=r^{3+2\varphi}\cdot e^{i(\vartheta+3\varphi)}.$$

Also strebt die Funktion $\rightarrow 0$, wenn das konstante φ in $-\frac{3}{2} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ liegt; sie wird unendlich, wenn $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < -\frac{3}{2}$ ist, und ist unbestimmt divergent, bleibt aber beschränkt, wenn z auf dem Strahle $\varphi = -\frac{3}{2}$ gegen 0 rückt. (Figur!)

§ 4. Integralsätze.

1. a) Da ein rektifizierbarer Weg eine oder auch unendlich viele Ecken haben kann, so sind die beiden ersten Fragen mit Ja zu beantworten. b) Aber auch die dritte! Denn es gibt (im Reellen) monotone stetige Funktionen $y = f(x)$, die an überall dicht gelegenen x-Stellen nicht differenzierbar sind. Das bekannteste Beispiel dafür ist die von H. A. Schwarz angegebene Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi(2^n x),$$

in der $\varphi(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ bedeuten soll (H. A. Schwarz, Ges. Abhandlungen, Bd. II, S. 269). Ihr Bild in der xy-Ebene liefert einen rektifizierbaren Weg (weil $f(x)$ stetig und monoton), der an überall dicht gelegenen Stellen keine Tangente besitzt. — An allen Stellen kann dies dagegen nicht eintreten. Der Beweis erfordert tiefere Sätze aus der Theorie der reellen Funktionen: 1. $x = x(t)$, $y = y(t)$ liefert nur dann einen rektifizierbaren Weg, wenn die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ stetig und von beschränkter Schwankung sind. 2. Eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung läßt sich als Summe zweier stetiger und monotoner Funktionen darstellen. 3. Eine stetige und monotone Funktion $f(x)$ ist für alle x differenzierbar, außer etwa an solchen Stellen, deren Menge den (Lebesgueschen) Inhalt 0 hat.

2. Es genügt zu zeigen, daß jede Halbebene $\mathfrak{H}$, die L' enthält, auch den Quotienten μ der beiden Integrale enthält. Dieser ist aber der Grenzwert von

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1})\varrho(\zeta_\lambda)\cdot f(\zeta_\lambda)}{\sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1})\varrho(\zeta_\lambda)} = \sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_\lambda \cdot f(\zeta_\lambda).$$

Da die Werte $f(\zeta_\lambda)$ in $\mathfrak{H}$ liegen, da $\alpha_\lambda > 0$ und $\sum_{\lambda=1}^{n}\alpha_\lambda = 1$ ist, so liegt nach § 1, Aufg. 1, auch der Wert dieses Ausdrucks in $\mathfrak{H}$, — und zwar für jedes n. Also auch der Grenzwert μ.

3. Der Existenzbeweis aus K I, § 12, ist fast ohne Änderung auch hier gültig. Nur im Beweis des Hilfssatzes 1 sind die Differenzen $(b-a)$, $(a_1 - a)$, $\ldots$, $(b - a_{p-1})$ von vornherein mit Absolutzeichen zu umgeben. — Man prüfe das genau durch!

4. Es ist

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{n}(z_\lambda - z_{\lambda-1})\, f(\zeta_\lambda)\right| \leqq \sum_{\lambda=1}^{n}|z_\lambda - z_{\lambda-1}|\cdot|f(\zeta_\lambda)|,$$

woraus durch Grenzübergang die Behauptung folgt.

5. Setzt man $U(x(t), y(t)) = \overline{U}(t)$ und analog $\overline{V}(t)$, so ist bei Benutzung der Bezeichnung aus K I, § 13,

$$\sum_{\lambda=1}^{n}|z_\lambda - z_{\lambda-1}|\cdot F(\zeta_\lambda)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n}(t_\lambda - t_{\lambda-1})\sqrt{(x'(\tau'_\lambda))^2 + (y'(\tau'_\lambda))^2}\,(\overline{U}(\tau_\lambda) + i\,\overline{V}(\tau_\lambda)).$$

Dies strebt

$$\to \int_\alpha^\beta (\overline{U}(t) + i\,\overline{V}(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \overline{U}(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt + i\int_\alpha^\beta \overline{V}(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

$$= {}^{(L)}\!\!\int U\,ds + i\,{}^{(L)}\!\!\int V\,ds = {}^{(L)}\!\!\int (U + iV)\,ds.$$

6. Es sei K ein Kreis um ζ mit dem Radius $\varrho_1 < \varrho$. Ist dann m so groß, daß für $n > m$ sowohl z_n als z'_n in K liegt so ist

$$f(z_n) = \frac{1}{2\pi i} {}^{(K)}\!\!\int \frac{f(z)}{z - z_n}\, dz\,, \qquad f(z'_n) = \frac{1}{2\pi i} {}^{(K)}\!\!\int \frac{f(z)}{z - z'_n}\, dz\,;$$

$$\frac{f(z'_n) - f(z_n)}{z'_n - z_n} - f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} {}^{(K)}\!\!\int f(z) \left[\frac{1}{(z - z_n)(z - z'_n)} - \frac{1}{(z - \zeta)^2}\right] dz$$

Genau wie K I, S. 70, beim Beweis der Integralformeln für die Ableitungen folgt hieraus, daß die linke Seite $\to 0$ strebt, wenn $z_n \to \zeta$ und gleichzeitig $z'_n \to \zeta$ rückt.

7. Da bei festem t auf L $F(z, t)$ in G regulär ist, so ist

$$\frac{1}{2\pi i} {}^{(K)}\!\!\int \frac{F(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta = F(z, t)\,.$$

Das in der Anleitung zur Lösung angegebene iterierte Integral ist also $= f(z)$. Ebenso ist

$$F'_z(z, t) = \frac{1}{2\pi i} {}^{(K)}\!\!\int \frac{F(\zeta, t)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\,.$$

Daher ist, wenn z_0 in G liegt, K einen noch in G gelegenen Kreis um z_0 und $z \neq z_0$ einen andern Punkt innerhalb K bedeutet,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - {}^{(L)}\!\!\int_a^b F'_z(z_0, t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} {}^{(L)}\!\!\int_a^b \left\{ {}^{(K)}\!\!\int F(\zeta, t) \left[\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2}\right] d\zeta \right\}.$$

Genau wie K I, § 19, folgt hieraus, daß für $z \to z_0$ der Ausdruck $\to 0$ strebt. Also existiert $f'(z_0)$ und hat den angegebenen Wert.

§ 5. Reihenentwicklungen.

1. Nach Voraussetzung läßt sich um jeden Punkt z von G ein Kreis K_z beschreiben, so daß die Reihe in K_z (bzw. dem zu G gehörigen Teil von K_z) gleichmäßig konvergiert. Nach

dem Heine-Borelschen Theorem (K I, S. 26) genügen endlich viele dieser Kreise, etwa $K_1, K_2, \ldots, K_p$, um G zu überdecken. Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so läßt sich zunächst n_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, p$) so wählen, daß für alle $n > n_\nu$, alle $k \geqq 1$ und alle z in K_ν

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+k}(z)| < \varepsilon$$

ist. Ist dann N größer als jede der Zahlen $n_1, \ldots, n_p$, so ist diese Ungleichung offenbar für alle z in G erfüllt, sobald $n > N$ und $k \geqq 1$ ist. Das ist aber die Behauptung.

2. Ist z in G gegeben, so beschreibe man einen Kreis K um z, dessen Peripherie ebenfalls noch ganz innerhalb G liegt. Dann ist nach Voraussetzung $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta)$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe K gleichmäßig konvergent. Auf der Peripherie von K ist dann auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}$ gleichmäßig konvergent und $= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$.

Nach K I, § 22, Satz 2, ist dann

$$\frac{1}{2\pi i} \overset{(K)}{\int} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \overset{(K)}{\int} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z).$$

Nach K I, § 19, definiert aber das linksstehende Integral eine innerhalb K, also speziell in z reguläre Funktion. Also ist $f(z)$ in G regulär. Und weiter ist nach diesem § 19

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \overset{(K)}{\int} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \overset{(K)}{\int} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}}\, d\zeta;$$

— letzteres, weil die benutzte Reihe auf der Peripherie von K bezüglich ζ gleichmäßig konvergiert. Also konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z)$ und ist $= f^{(p)}(z)$. Daß diese letzte Reihe sogar in jedem G' gleichmäßig konvergiert, folgt dann ebenso wie in K I, S. 83.

3. Es sei G' gegeben und C wie in K I, S. 83, gewählt. Ist dann $\varepsilon > 0$ gegeben, so läßt sich n_0 so bestimmen, daß für $n > n_0$, $k \geqq 1$, ζ auf C

$$(*) \qquad |f_{n+1}(\zeta)| + |f_{n+2}(\zeta)| + \cdots + |f_{n+k}(\zeta)| < \varepsilon$$

ausfällt. Dann ist aber auch für alle z in G'

$$|f^{(p)}_{n+1}(z)| + \cdots + |f^{(p)}_{n+k}(z)| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+k} \frac{p!}{2\pi} \int^{(C)} \frac{|f_\nu(\zeta)|}{|\zeta - z|^{p+1}} |d\zeta|,$$

— die Integrale rechterhand im Sinne von § 4, Aufg. 3, verstanden. Wegen (*) ist, wenn die (sicher positive) untere Grenze des Abstandes $|\zeta - z|$ eines Punktes von C und eines Punktes von G' mit ϱ und die Länge von C mit l bezeichnet wird, die letzte Summe

$$< \frac{p!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varrho^{p+1}} \cdot l,$$

woraus die Behauptung folgt.

4. Liegt ζ innerhalb G, so läßt sich um ζ ein so kleiner Kreis K mit dem Radius ϱ beschreiben, daß seine Peripherie auch noch ganz innerhalb G liegt und daß in ihm und auf seinem Rande $F(z) \neq 0$ ist, außer etwa in ζ selbst. Nach K I, § 35, Satz 1, ist dann

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int^{(K)} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0 \quad \text{oder} \quad = \alpha,$$

je nachdem $F(\zeta) \neq 0$ oder aber von der Ordnung α verschwindet. Von diesem Integral unterscheidet sich aber das Integral

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int^{(K)} \frac{s'_n(z)}{s_n(z)} dz$$

um beliebig wenig, wenn nur n groß genug ist. Denn bezeichnen wir mit $\mu > 0$ die untere Grenze von $|F(z)|$ auf

dem Rande von K und wählen ein positives $\varepsilon < \frac{1}{2}\mu$, so kann man n_0 so bestimmen, daß für $n > n_0$ und alle z auf K stets $|s_n(z) - F(z)| < \varepsilon$ und nach K I, § 22 gleichzeitig auch $|s'_n(z) - F'(z)| < \varepsilon$ ist. Dann ist einmal längs K $|s_n(z)| > \frac{1}{2}\mu$, das Integral (b) also vorhanden, und weiter die Differenz von (a) und (b) ihrem Betrage nach

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \operatorname{Max} \left| \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{s'_n(z)}{s_n(z)} \right|,$$

das Maximum auf dem Rande von K genommen; also

$$\leqq \varrho \cdot \frac{2M\varepsilon}{\frac{1}{2}\mu \cdot \mu},$$

wenn M eine obere Schranke von $|F(z)|$ und $|F'(z)|$ auf K bedeutet. Da hier ε beliebig klein sein durfte und andrerseits die Differenz von (a) und (b) eine ganze Zahl ist, so muß sie gleich 0 sein. Also hat $s_n(z)$ für alle hinreichend großen n innerhalb K genau so viele Nullstellen wie $F(z)$. Damit sind die Behauptungen des Satzes bewiesen, einschließlich einer genaueren Angabe über die Anzahl der Nullstellen von $s_n(z)$ in der Nähe von ζ.

5. Bezüglich des ersten Teiles der Behauptungen vgl. § 3, Aufg. 9. — Ferner ist

$$n b_n = n \frac{i(i+1)(i+2)\ldots(i+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

$$|n b_n| = \left|1 + \frac{i}{1}\right| \cdot \left|1 + \frac{i}{2}\right| \cdots \left|1 + \frac{i}{n-1}\right|$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dies strebt nach K II, § 3, 1. Beisp.,

$$\to \left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sin \pi i}{\pi i}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Es ist

$$(1+z)^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{z}\log(1+z)} = e^{1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-+\cdots} = e\cdot e^{-\frac{z}{2}}\cdot e^{+\frac{z^2}{3}}\cdots$$
$$= e\cdot\left[1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2!\,2^2}-\frac{z^3}{3!\,2^3}+\frac{z^4}{4!\,2^4}-\frac{z^5}{5!\,2^5}+-\cdots\right]$$
$$\cdot\left[1+\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{2!\cdot 3^2}+\cdots\right]\left[1-\frac{z^3}{4}+\cdots\right]$$
$$\cdot\left[1+\frac{z^4}{5}+\cdots\right]\left[1-\frac{z^5}{6}+\cdots\right]\cdots$$
$$= e\left[1-\tfrac{1}{2}z+\tfrac{11}{24}z^2-\tfrac{7}{16}z^3+\tfrac{2447}{5760}z^4-\tfrac{959}{2304}z^5+\cdots\right].$$

7. Es ist

$$f(z) = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha^\nu}{\nu!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\nu = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\alpha^\nu}{\nu!}\binom{\nu+\lambda-1}{\lambda}z^{\nu+\lambda}$$
$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{\alpha^k}{k!}\right\}z^n.$$

Es ist also $c_0 = 1$ und für $n \geqq 1$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{\alpha^k}{k!} = \gamma_1(n)+\gamma_2(n)+\cdots+\gamma_n(n).$$

Ist nun $\alpha > 0$, so wachsen die Glieder $\gamma_k(n)$ dieser Summe, solange $\gamma_k(n) \leqq \gamma_{k+1}(n)$ oder

$$k \leqq \xi = -\frac{\alpha+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2+\alpha n}.$$

Bezeichnet man also das Maximalglied mit μ_n, so wird es in der Summe für einen Index $k = p$ erreicht, für den die Abschätzung

$$p = \sqrt{\alpha n}+O(1)$$

gilt[1]). Wegen $\mu_n \leqq c_n \leqq n\,\mu_n$ ist nun

$$\log c_n = \log\mu_n + O(\log n).$$

[1]) Ist (p_n) eine Folge mit positiven Gliedern, so bezeichnet $O(p_n)$ irgendeine Folge, deren Glieder, durch p_n dividiert, beschränkte Beträge haben. Insbesondere bedeutet $O(1)$ eine Folge, die selbst beschränkt ist.

Ferner ist

$$\log \mu_n = \log \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{\alpha^p}{p!}.$$

Da nach der Stirlingschen Formel $\log m! = m \log m - m + O(\log m)$ ist, so folgt schließlich

$$\log c_n = n \log n - n - p \log p + p - (n-p) \log (n-p)$$
$$+ n - p + p \log \alpha - p \log p + p + O(\log n)$$
$$= n \log n - p \log \frac{p^2}{\alpha} + p - (n-p) \left[\log n + \log\left(1 - \frac{p}{n}\right)\right]$$
$$+ O(\log n)$$
$$= 2p + O(\log n) = 2\sqrt{\alpha n} + O(\log n),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. — Bei der Ausrechnung hat man nur zu beachten, daß $\frac{\log(1-z)+z}{z^2}$ für $z \to 0$ einen Grenzwert hat.

II. Kapitel.

Singuläre Stellen.

§ 6. Die Laurentsche Entwicklung.

1. Es sei G' irgendein abgeschlossenes Gebiet, das einschließlich seines Randes im Ringgebiet G liegt. Dann kann man — der Beweis schließt sich ganz eng an K I, § 31, an — die geschlossenen Wege C_1 und C_2 in G so wählen, daß C_1 sowohl G' als K_2 umschließt, während C_2 nur K_2 umschließt, dagegen G' in seinem Äußern liegen läßt. Dann ist für z in G'

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int^{(C_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Nach K I, § 19, stellt jedes der Integrale eine in der Umgebung eines jeden nicht auf C_1 bzw. C_2 gelegenen Punktes reguläre Funktion dar. Insbesondere stellt das erste Integral eine innerhalb C_1 — also (!) sogar innerhalb K_1 — re-

guläre Funktion $f_1(z)$, das zweite ebenso eine außerhalb K_2 (einschließlich ∞) reguläre Funktion $-f_2(z)$ dar. Da in G beide regulär sind, hat man dort

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Hat man analog

$$f(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z),$$

so ist

$$f_1(z) - \varphi_1(z) = \varphi_2(z) - f_2(z).$$

Diese Funktion ist also innerhalb K_1 und außerhalb K_2 (einschließlich ∞), also in der ganzen Ebene (einschließlich ∞) regulär und ist folglich eine Konstante.

2. Der ganz analog wie bei der vorigen Aufgabe zu machende Ansatz, bei dem das Regularitätsgebiet von $f(z)$ wie in K I, S. 65, Fig. 4, zu zerschneiden ist, führt zu der Darstellung

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_m(z),$$

in der $f_1(z)$ eine innerhalb K_1, die übrigen $f_\nu(z)$ je eine außerhalb K_ν und auch in ∞ reguläre Funktion bezeichnen ($\nu = 2, \ldots, m$). Hat man nun analog

$$f(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \cdots + \varphi_m(z),$$

so folgt aus

$$f_1(z) - \varphi_1(z) = (\varphi_2(z) - f_2(z)) + \cdots + (\varphi_m(z) - f_m(z))$$

wieder, daß hier beiderseits eine Konstante c steht. Aus

$$f_2(z) - \varphi_2(z) = (\varphi_3(z) - f_3(z)) + \cdots + (\varphi_m(z) - f_m(z)) - c$$

folgt dann analog, daß $f_2(z) - \varphi_2(z)$ konstant ist, usw.

3. a) Setzt man $\frac{1}{z} = z'$, so ist für $|z| > 1$, $|z'| < 1$

$$e^{\frac{1}{z-1}} = e^{\frac{z'}{1-z'}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z'^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n},$$

wenn die Koeffizienten c_n die Bedeutung aus § 5, Aufg. 7 (mit $\alpha = 1$), haben.

b) Für $|z| > 2$ ist $\sqrt{(z-1)(z-2)} = \pm z\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$.
Werden hier die Binomialentwicklungen genommen, so ist für $|z| > 2$ unsere Funktion also

$$= \pm z\left(1-\binom{\alpha}{1}\frac{1}{z}+\binom{\alpha}{2}\frac{1}{z^2}-+\cdots\right)\left(1-\binom{\alpha}{1}\frac{2}{z}+\binom{\alpha}{2}\frac{2^2}{z^2}-+\cdots\right)^{1)}$$

$$= \pm\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + - \cdots\right],$$

wenn

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2\binom{\alpha}{n-1}\binom{\alpha}{1} + 2^2\binom{\alpha}{n-2}\binom{\alpha}{2} + \cdots + 2^n\binom{\alpha}{n}$$

gesetzt wird.

c) $$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a}+\frac{1}{b-z}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{a}{z}}+\frac{1}{b}\,\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\cdots+\frac{a^2}{z^3}+\frac{a}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{b}+\frac{z}{b^2}+\frac{z^2}{b^3}+\cdots\right].$$

d) $$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{z^2}+\frac{b^2-a^2}{z^3}+\frac{b^3-a^3}{z^4}+\cdots\right].$$

e) $\log\frac{1}{1-z}$ gestattet für $|z| > 1$ keine Laurent-Entwicklung, da die Funktion dort nicht eindeutig ist. Setzt man $\frac{1}{z} = z'$, so ist

$$\log\frac{-z'}{1-z'} = \log(-z') + \log\frac{1}{1-z'}$$

$$= \log\left(-\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \cdots$$

ein Ersatz für die fehlende Entwicklung.

1) Des bequemeren Druckes wegen ist $\frac{1}{2} = \alpha$ gesetzt worden.

4. In $0 < |z| < \infty$ ist $g(z) \cdot \gamma(z)$ regulär und wird dort durch die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

dargestellt, in der für alle $n \gtreqless 0$

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \alpha_{k-n}$$

gesetzt ist. Hierbei sind alle a_ν und α_ν mit negativem Index $= 0$ zu setzen. (Wodurch ist die Konvergenz dieser Reihen gesichert? Vgl. hierzu die nächste Lösung.)

5. Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$ irgend zwei absolut konvergente Reihen (vgl. § 2, Aufg. 2a), so ist jede Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ konvergent, in der die γ_n irgendwelche der Produkte $\alpha_p \beta_q$, jedoch keine zwei verschiedenen γ_n dasselbe dieser Produkte, bedeuten. Enthält $\sum \gamma_n$ alle Produkte $\alpha_p \beta_q$, so ist ihr Wert $= \sum \alpha_n \cdot \sum \beta_n$. Für ein z im Innern des Konvergenzringes sind nun die gegebenen Reihen absolut konvergent, also nach der eben gemachten Bemerkung nicht nur die Reihen

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k} = z^{-n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (a_k z^k) b_{n-k} z^{n-k}),$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

sondern auch die mit diesen c_n als Koeffizienten angesetzte Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

die somit die Laurent-Entwicklung des Produktes liefert.

(Daß die Reihen nach beiden Seiten unendlich sind, macht keinen sachlichen Unterschied, da man ja auch jedes Glied mit negativem Index hinter das entsprechende mit positivem Index gestellt denken kann.)

6. $$e^{c\left(z+\frac{1}{z}\right)} = e^{cz} \cdot e^{\frac{c}{z}}$$
$$= \left(1 + cz + \frac{c^2}{2!}z^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{c}{z} + \frac{c^2}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$
wenn $c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^{n+k}}{(n+k)!} \cdot \frac{c^k}{k!}$, $n \geqq 0$ gesetzt wird.

§ 7. Die verschiedenen Arten singulärer Stellen.

1. a) $= (z^2 + 4)\,e^{-z}$; wesentlich singulär.

b) $= \pm z\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm z\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\right)$;

in jedem der beiden, in ∞ und Umgebung getrennt verlaufenden Blätter liegt ein Pol erster Ordnung.

c) $1 - z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + - \cdots$; wesentlich singulär.

d) und e) haben in ∞ keine isolierte singuläre Stelle, fallen daher nicht unter die Klassifikation von K I, § 33. Der Punkt ∞ ist hier Häufungspunkt von Polen erster Ordnung.

f) $= 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\,z^4} - + \cdots$; regulär und $= +1$ in ∞.

g) Setzt man $1 : z = z'$, so wird für $|z| > 1$, $|z'| < 1$
$$\sin\frac{1}{1-z} = -\sin\frac{z'}{1-z'} = -\frac{z'}{1-z'} + \frac{1}{3!}\left(\frac{z'}{1-z'}\right)^3 - + \cdots,$$
also (vgl. I, § 10, 1b)
$$= -z' + a_2 z'^2 + \cdots \qquad = -\frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots.$$

Die Funktion ist also in ∞ regulär und hat dort eine Nullstelle erster Ordnung.

h) und i) Hier ist ∞ wieder Häufungsstelle von Polen erster Ordnung.

2. a) $= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots$; wesentlich singulär.

b) $= -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{3!\,(z-1)^3} - + \cdots$; wesentlich singulär.

c) $$= \frac{1}{1 - \left[1 + (z - 2\pi i) + \frac{1}{2!}(z - 2\pi i)^2 + \cdots\right]}$$
$$= -\frac{1}{z - 2\pi i} + \frac{1}{2} + a_1(z - 2\pi i) + \cdots;$$

Pol erster Ordnung mit dem Residuum -1.

d) $$\sin z - \cos z = \sqrt{2}\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$\sqrt{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{6}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots;$$

Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

3. Es hat $f_1 \pm f_2$ wieder einen Pol β^{ter} Ordnung; $f_1 f_2$ einen Pol $(\beta - \alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung oder eine Nullstelle $(\alpha - \beta)^{\text{ter}}$ Ordnung oder eine reguläre Stelle mit von 0 verschiedenem Funktionswert, je nachdem $\beta > \alpha$, $< \alpha$ oder $= \alpha$ ist; $\frac{f_1}{f_2}$ eine Nullstelle $(\alpha + \beta)^{\text{ter}}$ Ordnung; $\frac{f_2}{f_1}$ einen Pol $(\alpha + \beta)^{\text{ter}}$ Ordnung. Beweise durch Ansetzen der Potenzreihen.

4. Da e^z eine ganze Funktion, so gibt es beliebig große Kreise K um 0, für die die Voraussetzungen des Satzes 1 in K I, § 35, erfüllt sind. Die Anzahl der im Innern von K liegenden Nullstellen ist

$$= \frac{1}{2\pi i} {}^{(K)}\!\!\int dz = 0.$$

5. Die reelle Funktion besitzt in $x = 0$ eine Nullstelle, sie ist dort differenzierbar, besitzt dort sogar Ableitungen jeder Ordnung, die alle den Wert 0 haben. Das Kurvenbild weist keinerlei irreguläres Verhalten bei $x = 0$ auf und ist höchstens dadurch bemerkenswert, daß die Berührung der Kurve und der x-Achse in $x = 0$ eine bessere ist als die jeder

Parabel $y = x^n$. Die Funktion komplexen Argumentes $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$ hat dagegen eine wesentlich singuläre Stelle in $z = 0$, so daß die Funktion in jeder Umgebung von 0 jedem Werte beliebig nahekommt.

6. $F_0(z)$ besitzt überhaupt kein Definitionsgebiet, da das bei z_0 uneigentliche Integral divergent ist ($\beta > 0$). —

Da zur Bildung von $F_1(z)$ die Laurent-Entwicklung von $f(z)$ gliedweis integriert werden darf, so erkennt man sofort, daß $F_1(z)$ dann und nur dann in der Umgebung von z_0 eindeutig ist, wenn das Residuum von $f(z)$ in z_0 gleich 0, insbesondere also $\beta \geqq 2$ ist. $F_1(z)$ hat dann in z_0 einen Pol $(\beta - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist das genannte Residuum $= c \neq 0$, so hat $F_1(z)$ in z_0 eine logarithmische Singularität; genauer: $F_1(z) - c \log(z - z_0)$ ist eindeutig in der Umgebung von z_0 und hat in z_0 einen Pol $(\beta - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung (bzw. ist dort regulär, falls $\beta = 1$).

7. Da die Entwicklung

$$\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\varphi(\zeta) - \frac{1}{z^2}\cdot\zeta\varphi(\zeta) - \frac{1}{z^3}\cdot\zeta^2\varphi(\zeta) - \cdots$$

bei festem hinreichend großem z bezüglich ζ längs L gleichmäßig konvergiert, so hat die außerhalb K gültige Laurent-Entwicklung von $f(z)$ die Form $\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$. $f(z)$ ist in ∞ regulär und hat dort eine Nullstelle.

8. Für $|z| > R$ sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Da diese Entwicklung längs L gliedweis integriert werden darf und hierbei alle Summanden einen eindeutigen (d. h. von L unabhängigen) Wert liefern, außer

$$a_{-1}\cdot\int^{(L)}\frac{dz}{z},$$

so ist $F(z)$ dann und nur dann eindeutig, wenn $a_{-1} = 0$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt und hat $f(z)$ in ∞ einen Pol

β^{ter} Ordnung, so hat $F(z)$ einen solchen $(\beta+1)^{\text{ter}}$ Ordnung; speziell einen Pol erster Ordnung, falls $f(z)$ in ∞ regulär und $\neq 0$ ist. Hat $f(z)$ in ∞ eine Nullstelle α^{ter} Ordnung ($\alpha \geqq 2$ wegen $a_{-1} = 0$), so hat $F(z)$ eine Nullstelle $(\alpha - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung. — Ist $a_{-1} \neq 0$, so bleibt $F(z) - a_{-1} \cdot \log z$ für $|z| > R$ regulär und weist in ∞ wiederum ein leicht anzugebendes Verhalten auf.

9. Es sei $z_0 \neq \infty$ und $f(z)$ in der Umgebung von z_0 beschränkt. Da das zweite der in der Aufgabe hingeschriebenen Integrale für alle hinreichend kleinen Kreise K_2 denselben Wert hat (vgl. K I, S. 121, unten), so kann man zur Ermittlung dieses Wertes den Radius ϱ von K_2 zu Null abnehmen lassen. Nun ist aber, wenn nur $\varrho < |z - z_0|$ ist und M eine Schranke für $|f(\zeta)|$ bedeutet,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int^{(K_2)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \frac{M}{|z - z_0| - \varrho},$$

was mit ϱ zu 0 abnimmt. Daher ist dieses zweite Integral $= 0$ und $f(z)$ gleich dem ersten Integral. Dieses definiert aber nach K I, § 19 eine innerhalb K_1, also speziell in z_0 reguläre Funktion. Da diese für $z \neq z_0$ mit $f(z)$ übereinstimmt, so ist $f(z)$ in z_0 regulär. Da umgekehrt eine in z_0 reguläre Funktion in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist, so ist der erste Teil des Riemannschen Satzes für $z_0 \neq \infty$ bewiesen. Der Fall $z_0 = \infty$ wird durch die Transformation $z = \frac{1}{z'}$ auf den Fall $z_0 = 0$ zurückgeführt. Die beiden andern Teile des Riemannschen Satzes ergeben sich nun wieder unmittelbar aus der Definition eines Poles bzw. einer wesentlich singulären Stelle als einer Stelle, bei deren Annäherung die Funktion bestimmt unendlich bzw. völlig unbestimmt wird.

10. Gesetzt, es gäbe eine Stelle z_0, eine Zahl c und ein $\varepsilon > 0$, so daß in einer Umgebung von z_0 (von z_0 selbst abgesehen) $f(z)$ eindeutig und regulär, aber stets $|f(z) - c| \geqq \varepsilon$

wäre, so wäre dort auch $\frac{1}{f(z) - c}$ eindeutig und regulär und bliebe dort beschränkt. Nach dem Riemannschen Satz müßte dann z_0 eine reguläre Stelle dieser Funktion sein. Daher hätte dort $f(z)$ entgegen der Annahme eine reguläre Stelle oder einen Pol.

11. Da die Beweise für $z_0 = \infty$ und $z_0 \neq \infty$ ganz analog verlaufen, genügt es, den ersten Fall zu betrachten. Es sei dann c eine beliebige komplexe, ε eine beliebig kleine und R eine beliebig große positive Zahl. Der Kreis mit ε um c heiße C, der mit R um 0 heiße K. Dann gibt es nach Casorati-Weierstraß ein z_1 außerhalb K, so daß $f(z_1) = c_1$ innerhalb C liegt. Um z_1 können wir einen Kreis K_1 und um c_1 einen Kreis C_1 derart beschreiben, daß alle Werte in C_1 von $f(z)$ innerhalb K_1 angenommen werden (vgl. Bi, S. 6, sowie K II, S. 113). C_1 denken wir uns dabei so klein, daß er ganz innerhalb C liegt und K_1 so, daß er ganz außerhalb K liegt. Nun gibt es ein $|z_2| > 2R$, so daß $f(z_2) = c_2$ innerhalb C_1 liegt. Um z_2 beschreiben wir K_2 und um c_2 den Kreis C_2, so daß alle Werte in C_2 von $f(z)$ in K_2 angenommen werden. Überdies liege C_2 ganz innerhalb C_1 und K_2 ganz außerhalb K und K_1. Nun gibt es ein $|z_3| > 3R$, so daß $f(z_3) = c_3$ innerhalb C_2 liegt, usw. Es gibt mindestens einen Punkt a, der allen Kreisen $C, C_1, C_2, C_3, \ldots$ gemeinsam ist. Die Gleichung $f(z) = a$ hat dann mindestens je eine Lösung in $K_1, K_2, \ldots$, also unendlich viele Lösungen außerhalb K, w. z. b. w. (Die Kreise $K, K_1, \ldots$ zeichne man in der z-Ebene, die Kreise $C, C_1, \ldots$ in einer w-Ebene.)

§ 8. Residuensatz, Nullstellen und Pole.

1. Es ist $\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{b_0}{z^n} + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{z}$, wenn $\frac{a_\nu}{a_n} = b_\nu$ gesetzt wird ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$). Für $|z| > 1$ ist daher $\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < \frac{|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{n-1}|}{|z|}$, also < 1 für $|z| = R$,

wofern $R > 1$ groß genug gewählt wird. Dies R kann nach K I, § 30, Satz 2, überdies so groß gewählt werden, daß außerhalb des Kreises $|z| = R$ und auf seinem Rande das Polynom $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ sicher keine Nullstelle mehr hat. Auf die Kreislinie $|z| = R$ ist nun der in der Aufgabe genannte Satz anwendbar. Da $f(z) = a_n z^n$ in $|z| < R$ offenbar nur die n-fache Nullstelle 0 hat, so hat $f(z) + \varphi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ in $|z| < R$ auch genau n Nullstellen und sonst keine weiteren.

2. $z e^{z^2}$ oder $(z^2 - 1)\, e^{cz}$, falls c nicht reell.

3. Hat $f(z)$ in z_0 einen Pol erster Ordnung, so ist das dortige Residuum $= \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$. Andernfalls muß man die Laurent-Entwicklung aufstellen, um das Residuum zu erhalten.

a) $$= \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)}{\sin z} = \left(\frac{1}{\cos z}\right)_{z = k\pi} = (-1)^k.$$

b₁) $$= \lim_{z \to 1} \frac{z}{(z-2)^2} = 1.$$

b₂) $$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{2 + (z-2)}{1 + (z-2)}$$
$$= \frac{2}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + c_0 + c_1(z-2) + \cdots.$$

Residuum $= -1$.

c₁) $$f(z) = \frac{1}{(z - z_1)^m} \cdot \frac{-a}{z_2 - z_1} \left[1 + \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} + \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)^2 + \cdots\right].$$

Residuum $= \dfrac{-a}{(z_2 - z_1)^m}$.

c₂) $$= \lim_{z \to z_2} \frac{a}{(z - z_1)^m} = \frac{a}{(z_2 - z_1)^m}.$$

d) $$= \lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k) \sin z}{\cos z} = -1.$$ Residuum $= -1$.

e) $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots.$ Residuum $= 1$.

f) $e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{z-1} + \cdots.$ Residuum $= 1$.

g) $= \lim\limits_{z \to 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{1 - e^z} = \left(\frac{1}{-e^z}\right)_{z = 2k\pi i} = -1.$

4. Nach K I, S. 134, aus

$$[\varphi(z_0) + \varphi'(z_0) \cdot (z - z_0) + \cdots]\left[\frac{\alpha}{z - z_0} + \cdots\right]$$

abzulesen. Residuum $= \alpha z_0$ bzw. $\alpha\varphi(z_0)$. Analog für die zweite Frage: $-\beta z_0$ bzw. $-\beta \cdot \varphi(z_0)$.

5. Nach K I, S. 135, und nach der vorigen Aufgabe ist unter den Voraussetzungen des dortigen Satzes 2 das erste Integral

$$= \sum z_\nu - \sum z'_\mu$$

erstreckt über die innerhalb C gelegenen Nullstellen z_ν bzw. die dort gelegenen Pole z'_μ, ein jedes so oft genommen, als die zugehörige Ordnungszahl Einheiten hat. Analog ist das zweite Integral

$$= \sum \varphi(z_\nu) - \sum \varphi(z'_\mu).$$

6. Setzt man

$$\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(z_0) = a_\nu, \quad \frac{1}{\nu!} g^{(\nu)}(z_0) = b_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

so ist

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots}{b_2(z - z_0)^2 + b_3(z - z_0)^3 + \cdots}; \quad a_0 \neq 0,\ b_2 \neq 0.$$

$$= \frac{1}{b_2 z'^2}\left[a_0 + a_1 z' + \cdots\right]\left[1 - \frac{b_3}{b_2} z' + \cdots\right]; \; z' = (z - z_0);$$

Residuum $= \dfrac{a_1 b_2 - a_0 b_3}{b_2^2}$.

Für die zweite Frage hat man analog bei $b_3 \neq 0$:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{b_3 z'^3}\left[a_0 + a_1 z' + a_2 z'^2 + \cdots\right]\left[1 - \frac{b_4}{b_3} z + \left(\frac{b_4^2}{b_3^2} - \frac{b_5}{b_3}\right) z^2 + \cdots\right].$$

$$\text{Residuum} = \frac{a_0 b_4^2 - a_0 b_3 b_5 - a_1 b_3 b_4 + a_2 b_3^2}{b_3^3}.$$

7. a) $= 2\pi i$.

b) Da alle Pole (die in den ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$ liegen) das Residuum $-\frac{1}{\pi}$ haben (vgl. Aufg. 3d), ist das Integral $= -4ni$.

c) $$= 2\pi i\left(\frac{f(z_1)}{(z_1 - z_2)\ldots(z_1 - z_k)} + \frac{f(z_2)}{(z_2 - z_1)\ldots(z_2 - z_k)} + \cdots + \frac{f(z_k)}{(z_k - z_1)\ldots(z_k - z_{k-1})}\right).$$

8. Aus den Voraussetzungen folgt sofort, daß r_0 so groß gewählt werden kann, daß für $|z| > r_0$ Zähler und Nenner von $R(z)$ keine Nullstelle mehr haben und daß für ein passendes $\alpha > 0$ dort $|R(z)| < \frac{\alpha}{|z|^2}$ bleibt. Daraus folgt zunächst die Konvergenz des Integrals. Ist dann $r > r_0$ und C der geschlossene Weg, der von $-r$ längs der reellen Achse nach $+r$ und von dort längs der oberen Hälfte H des Kreises $|z| = r$ zurück nach $-r$ führt, so ist

$$^{(C)}\!\!\int R(z)\,dz = \int_{-r}^{+r} R(x)\,dx + {}^{(H)}\!\!\int R(z)\,dz = 2\pi i S.$$

Hierbei ist aber

$$\left|{}^{(H)}\!\!\int R(z)\,dz\right| \leqq \frac{\alpha}{r^2}\cdot \pi r = \frac{\alpha\pi}{r}.$$

Für $r \to +\infty$ ergibt sich hieraus die Behauptung (und nochmals die Konvergenz des Integrals).

9. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0,$$

also $$J_1 + J_3 \quad \text{oder also} \quad 2i\int_{\varrho}^{r}\frac{\sin x}{x}\,dx = -J_2 - J_4.$$

Nach I, § 7, Aufg. 6a und b strebt $J_2 \to 0$ für $r \to +\infty$ und $J_4 \to -\pi i$ für $\varrho \to 0$. Also ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

10. Es ist ${}^{(C)}\int e^{-z^2} dz = 0$, also

$$0 = \int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} \cdot i R e^{i\varphi} d\varphi + \int_{Re^{i\frac{\pi}{4}}}^0 e^{-z^2} dz,$$

wenn das letzte Integral wieder geradlinig genommen wird. Für $R \to +\infty$ hat das erste Integral den Grenzwert $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und das zweite den Grenzwert 0, denn es ist absolut genommen

$$< R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos 2\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin \psi} d\psi, \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right).$$

Nun ist in $0 \ldots \frac{\pi}{2}$ bekanntlich $\sin\varphi > \frac{1}{2}\varphi$, also das Integral auch

$$< \frac{1}{2} R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}R^2\varphi} d\varphi < \frac{1}{R}, \text{ strebt also gegen } 0.$$

Das dritte unserer Integrale ist für $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, t$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2} dt = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\int_0^R \cos(t^2)\, dt - i \int_0^R \sin(t^2)\, dt \right).$$

Daher strebt für $R \to \infty$

$$\int_0^R \cos(t^2)\, dt - i \int_0^R \sin(t^2)\, dt \to \frac{\sqrt{2}}{1+i} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (1 - i).$$

Trennung in Reelles und Imaginäres liefert die beiden Formeln.

III. Kapitel.

Ganze und meromorphe Funktionen.

§ 9. Unendliche Produkte. Weierstraßscher Produktsatz.

1. Nach K II, § 2, Satz 4 und 5 sind die Produkte absolut konvergent. Weiter hat man

a) $$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} = 2\,.$$

b) $$= \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$
$$= \lim \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1}{3}$$

c) $$= \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{2}{3}\,.$$

d) $$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \text{ für } z = i\,, \text{ also } = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\,.$$

(Vgl. § 5, Aufg. 5.)

2. Subtrahiert man die n^{te} Teilsumme der Reihe von 1, so ergibt sich durch sukzessives Zusammenfassen

$$(1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)\ldots(1-\vartheta_n)\,.$$

Da dies >0, so sind die Teilsummen <1, die Reihe also konvergent. Genauer: Ist $\sum \vartheta_n$ divergent, so ist die vorgelegte Reihe konvergent mit der Summe 1. Ist $\sum \vartheta_n$ konvergent, so ist es nach K II, § 2, Satz 5, auch $\prod (1-\vartheta_n)$, und die vorgelegte Reihe konvergiert mit der Summe $1-\prod(1-\vartheta_n)$.

3. a) in $0 \leqq x \leqq 1$ ist $e^{\frac{1}{2}x} \leqq 1 + x \leqq e^x$; vgl. I, § 6, Aufg. 3. Also ist, da unter jeder der Voraussetzungen $\gamma_\nu \to 0$ streben muß, für alle λ von einer Stelle an und alle $k \geqq 1$

$$e^{\frac{1}{2}(\gamma_\lambda + \gamma_{\lambda+1} + \cdots + \gamma_{\lambda+k})} \leqq \prod_{\nu=\lambda}^{\lambda+k} (1 + \gamma_\nu) \leqq e^{\gamma_\lambda + \gamma_{\lambda+1} + \cdots + \gamma_{\lambda+k}}.$$

Nach der rechten Hälfte dieser Ungleichung folgt aus der Beschränktheit der Teilsummen von $\sum \gamma_\nu$ die der Teilprodukte von $\prod (1 + \gamma_\nu)$ und nach der linken Hälfte das Umgekehrte.

b) Es ist $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n < (1+\gamma_1)(1+\gamma_2)\ldots(1+\gamma_n)$. Aus der Beschränktheit der Teilprodukte folgt also die der Teilsummen. Wählt man andererseits, wenn $\sum \gamma_\nu$ konvergiert, m so, daß $\gamma_{m+1} + \gamma_{m+2} + \cdots + \gamma_{m+k} < \frac{1}{2}$ für alle $k \geqq 1$, so folgt, daß

$$(1 + \gamma_{m+1}) \ldots (1 + \gamma_{m+k}) < 1 + (\gamma_{m+1} + \cdots + \gamma_{m+k}) + (\gamma_{m+1} + \cdots + \gamma_{m+k})^2 + \cdots$$

also < 2 ist für alle $k \geqq 1$. Also ist auch $\prod (1 + \gamma_\nu)$ konvergent.

4. Aus der Voraussetzung folgt zunächst, daß $a_n \to 0$ strebt. Nun ist für $|z| < \frac{1}{2}$ offenbar $|\log(1 + z) - z| \leqq \frac{|z|^2}{2}(1 + |z| + |z|^2 + \cdots) < |z|^2$. Wird also m so gewählt, daß für $n > m$ stets $|a_n| < \frac{1}{2}$ ist, so ist für alle $n > m$ und alle $k \geqq 1$

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+k} \log(1 + a_\nu) - \sum_{\nu=n+1}^{n+k} a_\nu \right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+k} |a_\nu|^2,$$

was $\to 0$ strebt für $n \to \infty$. Daraus kann die Behauptung abgelesen werden. — Aus $\left|\frac{\log(1 + a_n)}{a_n}\right| \to 1$ ergibt sich endlich sofort die Behauptung bezüglich der absoluten Konvergenz der Reihen.

5. a) und b) $|z| < 1$;

c) die ganze Ebene;

d) und e) die Halbebene $\Re(z) > 1$. Beweis jedesmal nach K II, § 2, Satz 5.

6. a) Es ist $(1-z)\cdot(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2^n}) = 1-z^{2^{n+1}}$, was $\to 1$ strebt.

b) Nach a) ist $\dfrac{1}{1-z^{2\nu+1}} = \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n(2\nu+1)})$. Die Exponenten $2^n(2\nu+1)$ liefern aber für $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ jede natürliche Zahl ein- und nur einmal.

7. Da man endlich viele Potenzreihen miteinander nach den elementaren Regeln multiplizieren darf, so ist der Ansatz (*) der Aufgabe jedenfalls erlaubt, d. h. $A_\lambda^{(n)}$ wird (bei festem n und λ) gewonnen, indem man links alle höheren Potenzen $z^{\lambda+1}, z^{\lambda+2}, \ldots$ unterdrückt, das endliche Produkt gewöhnlicher Summen $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1+a_0^{(\nu)}+a_1^{(\nu)}z+\cdots+a_\lambda^{(\nu)}z^\lambda)$ ausmultipliziert und die Glieder mit z^λ sammelt. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz (K I, § 23, S. 89) ist nun, weil nach K II, S. 20 die Reihe $P_1 + (P_2 - P_1) + \cdots$ in $|z| \leqq \varrho < r$ gleichmäßig konvergiert, bei festem λ auch die Reihe

$$A_\lambda^{(1)} + (A_\lambda^{(2)} - A_\lambda^{(1)}) + \cdots = \lim_{n\to\infty} A_\lambda^{(n)}$$

konvergent und hat zum Werte den Koeffizienten A_λ.

8. Es ist $\dfrac{\sin\pi z}{\pi z} = 1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{6} + \dfrac{\pi^4 z^4}{120} - + \cdots$ und andererseits durch Ausmultiplizieren des Produkts nach der vorigen Aufgabe

$$= 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)z^2 + \left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{k^2 n^2}\right)\right]z^4 - + \cdots.$$

Es ist also $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\pi^4}{120}.$$

Addiert man die beiden letzten Reihen gliedweis, so erhält man $\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)^2-\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right)=\frac{\pi^4}{60}$. Hiernach ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{36}-\frac{\pi^4}{60}=\frac{\pi^4}{90}$.

9. a) $C_0=1,\quad C_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu,\quad C_2=\sum_{1\leqq\varkappa<\lambda}^{\infty}c_\varkappa c_\lambda,$

$$C_3=\sum_{1\leqq\varkappa<\lambda<\mu}^{\infty}c_\varkappa c_\lambda c_\mu,\ \ldots .$$

b) $A_0=1,\quad A_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}q^{2\nu-1}=\frac{q}{1-q^2},$

$$A_2=\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)},\ \ldots .$$

A_1 und A_2 findet man direkt nach a), die allgemeine Form von A_λ bequemer so: Es ist

$$\Pi(1+q^{2n-1}z)=f(z)=(1+qz)\,f(q^2z),$$

also

$$1+A_1z+A_2z^2+\cdots=(1+qz)(1+A_1q^2z+A_2q^4z^2+\cdots).$$

Dies liefert

$A_\nu=A_{\nu-1}\cdot\frac{q^{2\nu-1}}{1-q^{2\nu}}$, was $A_\lambda=\frac{q^{\lambda^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2\lambda})}$

zur Folge hat.

c) Nach a) ist $\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}D_\lambda z^\lambda=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu z_\nu\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{C_\nu}{z^\nu}$. Also ist $D_0=C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots$ und allgemein für alle $\lambda\geqq 0$ $D_\lambda=D_{-\lambda}=C_0C_\lambda+C_1C_{\lambda+1}+C_2C_{\lambda+2}+\cdots$. Die Entwicklung kann daher auch in der Form $D_0+D_1\left(z+\frac{1}{z}\right)+D_2\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\cdots$ geschrieben werden. (Vgl. hierzu § 6, Aufg. 5.)

d) $B_\lambda = B_{-\lambda} = A_0 A_\lambda + A_1 A_{\lambda+1} + \cdots$, $\lambda \geqq 0$, nach b) und c). Geschlossene Werte erhält man so: Wegen $F(z) = qz \cdot F(q^2 z)$ ist

$$B_0 + B_1\left(z + \frac{1}{z}\right) + \cdots = B_0 qz + \left(B_1 q^3 z^2 + \frac{B_1}{q}\right) + \cdots.$$

Der Vergleich liefert $B_\nu = q^{2\nu-1} B_{\nu-1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ und somit $B_\lambda = q^{\lambda^2} \cdot B_0$. Es ist also

$$F(z) = B_0 \cdot \left[1 + q\left(z + \frac{1}{z}\right) + \cdots + q^{\lambda^2}\left(z^\lambda + \frac{1}{z^\lambda}\right) + \cdots\right].$$

B_0 bestimmt sich aus $B_\lambda = q^{\lambda^2} \cdot B_0 = A_\lambda + A_1 A_{\lambda+1} + \cdots$. Denn hiernach ist, wenn zur Abkürzung $(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2\nu}) = p_\nu$ gesetzt wird,

$$q^{\lambda^2} \cdot B_0 = \frac{q^{\lambda^2}}{p_\lambda} + \frac{q \cdot q^{(\lambda+1)^2}}{p_1 \cdot p_{\lambda+1}} + \cdots,$$

also $|p_\lambda B_0 - 1| \leqq \dfrac{|q|^{2\lambda} + |q|^{4\lambda} + |q|^{6\lambda} + \cdots}{[(1-|q|^2)(1-|q|^4)\ldots]^2} \leqq c \cdot |q|^{2\lambda}$, wenn c eine geeignete positive Zahl bedeutet. Also strebt $p_\lambda B_0 \to 1$, d. h. es ist $B_0 = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{1}{1-q^{2\nu}}$. Hiernach ist nun

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z) \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$
$$= 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} q^{\lambda^2}\left(z^\lambda + \frac{1}{z^\lambda}\right)$$

die gesuchte Entwicklung.

e) Ersetzt man z in d) durch $-z^{\frac{1}{2}}$ und gleichzeitig q durch $z^{\frac{3}{2}}$, so ist für $|z| < 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{3n}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{3n-1}) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1-z^{3n-2}),$$

oder also

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda\left(z^{\frac{3\lambda^2-\lambda}{2}} + z^{\frac{3\lambda^2+\lambda}{2}}\right)$$
$$= 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + + - - \cdots.$$

(Euler-Legendrescher Pentagonalzahlsatz.)

10. a) Setzt man in $\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ erst $z = \frac{1}{2}$, dann $z = \frac{1}{4}$ und dividiert das zweite durch das erste, so hat man wegen $\prod \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \prod \left(1 - \frac{1}{(4k-2)^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(4k)^2}\right)$ unmittelbar die Behauptung.

b) Analog für $z = \frac{1}{6}$ und $z = \frac{1}{3}$.

11. a) $$e^z - 1 = 2i \cdot e^{\frac{z}{2}} \cdot \frac{e^{i\frac{z}{2i}} - e^{-i\frac{z}{2i}}}{2i} = 2i\, e^{\frac{z}{2}} \cdot \sin \frac{z}{2i}$$
$$= e^{\frac{z}{2}} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right).$$

b) Nach a), weil $= e^{z_0}(e^{z-z_0} - 1)$,
$$= e^{z_0} \cdot e^{\frac{z-z_0}{2}} \cdot (z - z_0) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(z-z_0)^2}{4\pi^2 n^2}\right).$$

c) $$\cos \pi z = \frac{\sin 2\pi z}{2 \sin \pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

d) und e) sind wegen
$$\sin \pi z - \sin \pi z_0 = 2 \cos \pi \frac{z + z_0}{2} \sin \pi \frac{z - z_0}{2} \quad \text{und}$$
$$\cos \pi z - \cos \pi z_0 = -2 \sin \pi \frac{z + z_0}{2} \sin \pi \frac{z - z_0}{2}$$
nach c) sofort hinzuschreiben:
$$\sin \pi z - \sin \pi z_0 = \pi (z - z_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z+z_0)^2}{(2n-1)^2}\right)\left(1 - \frac{(z-z_0)^2}{(2n)^2}\right)$$
$$\cos \pi z - \cos \pi z_0 = -\frac{1}{2} \pi^2 (z^2 - z_0^2) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z+z_0)^2}{4n^2}\right)\left(1 - \frac{(z-z_0)^2}{4n^2}\right).$$

12. Bei geeigneter Wahl der k_λ leistet das in K II, § 2, S. 25, hingeschriebene Produkt wieder das Verlangte. Und zwar genügt es, die k_λ so zu wählen, daß die Reihe (3) auf K II, S. 24, jetzt wenigstens für alle $|z| < 1$ konvergiert. Das ist z. B. für $k_\lambda = \lambda + \alpha_\lambda$ der Fall. Denn ist z fest mit

$|z| = \varrho < 1$ und ist $\varrho < \varrho_1 < 1$, so ist für alle hinreichend großen λ offenbar $\left|\alpha_\lambda \left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{k_\lambda}\right| \leqq \alpha_\lambda \varrho_1^{\alpha_\lambda} \cdot \varrho_1^{\lambda}$. Wegen $n \varrho_1^n \to 0$ ist dies $< K \cdot \varrho_1^\lambda$, wenn K eine Schranke der Folge $n \varrho_1^n$ bedeutet.

Der Beweis der Behauptung verläuft nun genau wie K II, S. 25—27. Es ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4) in $|z| \leqq \varrho < 1$, ϱ fest, zu zeigen. Geringe Modifikationen der Abschätzungen auf K II, S. 26 — in (5) ist ϱ_1 statt $\frac{1}{2}$ zu setzen — lehren, daß jetzt, wenn K_1 eine passende positive Zahl bedeutet, für alle $|z| \leqq \varrho$ und alle hinreichend großen λ

$$|f_\lambda(z)| \leqq K_1 \cdot \alpha_\lambda \left|\frac{\varrho}{z_\lambda}\right|^{k_\lambda}$$

ist, womit alles bewiesen ist.

13. Man hat die z_n nur so zu wählen, daß sie sich längs des ganzen Randes des Einheitskreises häufen. Das kann z. B. so geschehen, daß man auf der Peripherie des Kreises mit $\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ um 0 die Ecken eines einbeschriebenen k-Ecks markiert ($k = 2, 3, \ldots$) und diese Punkte zur Folge $z_1, z_2, \ldots$ anordnet.

§ 10. Ganze Funktionen.

1. Nach § 7, Aufg. 11, aber auch schon nach dem Casorati-Weierstraßschen Satze selbst, kann die Funktion nur eine ganze rationale Funktion sein. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra muß sie vom ersten Grade sein.

2. Ist $w = g(z)$ ganz und die inverse Funktion $z = g_1(w)$ wieder ganz, so nimmt $g(z)$ jeden Wert ein- und nur einmal an; also ist $g(z)$ nach Aufg. 1 linear.

3. Die Funktion $g_1(z)$ ist wieder eine ganze Funktion, speziell $g_1(z_0) = g'(z_0)$. Wäre nun stets $|g(z)| < K$, so wäre

ür $|z - z_0| = R$ stets $|g_1(z)| < \frac{2K}{R}$. Nach K I, § 24, atz 5, gilt dies auch für alle $|z - z_0| < R$, speziell in z_0. lso ist $|g'(z_0)| < \frac{2K}{R}$, also, da R beliebig groß sein darf, $'(z_0) = 0$. Da z_0 beliebig war, ist $g(z)$ konstant.

4. Ja! Beispiel: $g(z) = e^z + z$. Ist nämlich in $z = re^{i\varphi}$ unächst $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, so ist $|g(z)| \geqq e^{r\cos\varphi} - r$, was bei estem φ mit r gegen $+\infty$ wächst. Ist aber $+\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{2}$, bleibt e^z beschränkt und $|g(z)| \geqq r - e^{r\cos\varphi}$ strebt ieder mit r gegen $+\infty$.

5. Da $f^{(n)}(z_0) \to 0$ strebt, ist die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

eständig konvergent, also $f(z)$ ganz. Ist dann $\varepsilon > 0$ beebig und k_0 so gewählt, daß $|f^{(k+1)}(z_0) + \cdots + f^{(k+p)}(z_0)|$ $< \varepsilon$ ist für $k > k_0$, $p \geqq 1$, so ist für irgendein z_1

$$|f^{(k+1)}(z_1) + \cdots + f^{(k+p)}(z_1)|$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k+1)}(z_0) + \cdots + f^{(n+k+p)}(z_0)}{n!} (z_1 - z_0)^n \right|,$$

lso $< \varepsilon \cdot e^{|z_1 - z_0|}$ für $k > k_0$, $p \geqq 1$. Also konvergiert $\sum_{=0}^{\infty} f^{(n)}(z_1)$.

6. Es sei $W(z)$ die nach dem Weierstraßschen Produkttz zu konstruierende Funktion, die in den z_λ je eine Nullelle erster Ordnung hat. Dann ist $W'(z_\lambda) \neq 0$. Es sei $M(z)$ ie nach dem Mittag-Lefflerschen Satz zu bildende Funkon, die in den z_λ Pole erster Ordnung mit dem Residuum $_\lambda : W'(z_\lambda)$ hat. Dann ist $g(z) = W(z) \cdot M(z)$ offenbar eine anze Funktion, die das Verlangte leistet.

7. Man wähle die reellen rationalen Zahlen a_ν der Reihe nach so, daß 1) $|a_0 - \beta| < 1$, 2) $|a_0 + a_1\alpha - \beta| < 1, \ldots,$ n) $|a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} - \beta| < \frac{1}{(n-1)!}, \ldots$. Dann ist jedenfalls $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots = \beta$. Ferner ist

$$|a_n\alpha^n| < \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{n+1}{n!},$$

woraus hervorgeht, daß $\sum a_n z^n$ beständig konvergiert.

8. Da man in beliebiger Nähe einer komplexen Zahl stets eine rationale komplexe Zahl angeben kann, so bleibt der vorige Beweis unverändert gültig.

9. Ist $r' > r$, so kann das Maximum von $|g(z)|$ in $|z| \leqq r'$ nicht kleiner sein als in $|z| \leqq r$. Also wächst $M(r)$ monoton. Ist nun $R > r$, so ist $g(z)$ in $|z| \leqq R$ gleichmäßig stetig. Ist also $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man $\delta > 0$ so klein wählen, daß für alle r' in $r - \delta < r' < r + \delta$ die Differenz $|g(z') - g(z)| < \varepsilon$ ist, wenn $|z| = r$, $|z'| = r'$ und $\operatorname{arc} z = \operatorname{arc} z'$ ist. Daher ist für diese r' auch $M(r) - \varepsilon < M(r') < M(r) + \varepsilon$. $M(r)$ ist also stetig.

10. Kann man in $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $|z| = r$ den Punkt $z = z_0$ so wählen, daß alle Glieder $a_n z_0^n$ denselben arc haben (soweit sie $\neq 0$ sind), so ist für dies r offenbar $M(r) = |g(z_0)|$. Daher ist

a) für e^z: $M(r) = e^r$; b) für $\sin z$: $M(r) = \frac{1}{2}(e^r - e^{-r})$;
c) für $\cos z$: $M(r) = \frac{1}{2}(e^r + e^{-r})$;

d) für $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - + \cdots$: $M(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}(e^{\sqrt{r}} - e^{-\sqrt{r}})$.

11. Es genügt das Beispiel $f(z) = z^2 + 2iz + 1$. Für $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ wird

$$|f(z)|^2 = r^4 + 4r^2 + 1 + 2r^2\cos 2\varphi - 4r(1 - r^2)\sin\varphi.$$

Bei festem r in $0 < r \leqq \sqrt{2} - 1$ wird diese Funktion

von φ zu einem Maximum für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, dagegen für $\sin\varphi = -\frac{1-r^2}{2r}$ in $\sqrt{2}-1 \leqq r \leqq 1$. Daher ist

$$M(r) = \begin{cases} 1+2r-r^2 & \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq \sqrt{2}-1, \\ (1+r^2)\sqrt{2} & \text{für} \quad \sqrt{2}-1 \leqq r \leqq 1. \end{cases}$$

Diese Funktion ist an der Stelle $r = \sqrt{2}-1$ zwar stetig, aber nicht analytisch, da sie dort zwar eine erste, aber keine zweite Ableitung besitzt.

§ 11. Partialbruchreihen. Mittag-Lefflerscher Satz.

1. a) Aus der ctg-Entwicklung (K II, S. 47) folgt, da

$$\pi \operatorname{tg}\frac{\pi z}{2} = \pi \operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2} - 2\pi \operatorname{ctg}\pi z$$

ist, sofort die gesuchte Entwicklung

$$\pi \operatorname{tg}\frac{\pi z}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4z}{(2k+1)^2 - z^2}, \quad z \neq \pm 1, \pm 3, \ldots .$$

Diese Formel gilt zunächst nur für $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; doch prüft man nachträglich direkt, daß sie für $z = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ noch gültig ist.

b) Wegen $\frac{1}{\sin z} = \operatorname{ctg} z + \operatorname{tg}\frac{z}{2}$ hat man

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2z}{k^2 - z^2}.$$

c) Nach b) hat man, indem $\frac{2z}{k^2-z^2} = \frac{1}{k-z} - \frac{1}{k+z}$ und hierauf z durch $\frac{1}{2} - z$ ersetzt wird,

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \frac{2}{1-2z} + \left(\frac{2}{1+2z} - \frac{2}{3-2z}\right) - \left(\frac{2}{3+2z} - \frac{2}{5-2z}\right) + - \cdots.$$

Hier darf man die runden Klammern fortlassen und je zwei Glieder gleichen Vorzeichens zusammenfassen (warum?); dies liefert

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \frac{4 \cdot 1}{1^2 - 4z^2} - \frac{4 \cdot 3}{3^2 - 4z^2} + \frac{4 \cdot 5}{5^2 - 4z^2} - + \cdots.$$

d) Es ist $\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{iz}{2}$, also

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

e) Wegen $\cos \pi z - \sin \pi z = \sqrt{2} \cdot \sin \pi (\frac{1}{4} - z)$ erhält man nach b)

$$\frac{\pi}{\cos \pi z - \sin \pi z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{4} - z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2(\frac{1}{4} - z)}{k^2 - (\frac{1}{4} - z)^2} \right\}.$$

2. Es wird $M_0(z) = \frac{\alpha_0}{z} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_\lambda}{z - z_\lambda} - g_\lambda(z) \right]$, wenn $-g_\lambda(z)$ ein geeignet langes Anfangsstück der Reihe $\alpha_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_\lambda^{n+1}}$ bedeutet. Ist nun $R > 0$ fest gewählt, so läßt sich nach K II, S. 44, m so bestimmen, daß die Glieder jener Reihe für $\lambda > m$ in $|z| \leqq R$ regulär sind und daß die bei $\lambda = m + 1$ begonnene Reihe dort gleichmäßig konvergiert. Daher darf man gliedweis integrieren (etwa geradlinig von 0 bis z) und in den Exponenten von e setzen. Nach Anfügung der Anfangsglieder folgt somit, daß das Produkt

$$z^{\alpha_0} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right) e^{G_\lambda(z)} \right]^{\alpha_\lambda},$$

bei dem $G_\lambda(z)$ die Form $\frac{z}{z_\lambda} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n_\lambda + 1}\left(\frac{z}{z_\lambda}\right)^{n_\lambda + 1}$ hat, eine ganze Funktion mit den im Weierstraßschen Satz verlangten Eigenschaften darstellt.

3. An Satz und Beweis ändert sich nicht das geringste, wenn die Punkte z_λ nicht Pole, sondern (sämtlich oder teilweis) auch wesentlich singuläre Stellen sein sollen.

4. Wird auch nur an einer einzigen Stelle z_λ neben dem absteigenden Ast auch der ganze aufsteigende Ast vorgeschrieben, so ist damit die Funktion selbst vollständig ge-

geben, die bei z_λ diese Entwicklung besitzt. Man kann ihr also keine weiteren Bedingungen auferlegen. Dagegen darf an jeder Stelle z_λ ein (beliebig langes) Anfangsstück des aufsteigenden Astes vorgeschrieben werden. Es sei also für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_\lambda(z) = \sum_{n=-\infty}^{\beta_\lambda} a_n^{(\lambda)} (z - z_\lambda)^n,$$

wobei $\beta_0, \beta_1, \ldots$ irgendwelche nicht negative ganze Zahlen bedeuten. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $F(z)$, die in der ganzen Ebene bis auf die Stellen z_λ regulär ist und die in jedem der Punkte z_λ sich so verhält, daß $F(z) - H_\lambda(z)$ dort regulär ist und eine Nullstelle von mindestens $(\beta_\lambda + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt. Der Beweis läßt sich durch Fortführung des Gedankens aus § 10, Aufg. 6, sofort erbringen. Es sei $W(z)$ eine ganze Funktion, die in den z_λ je eine Nullstelle $(\beta_\lambda + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat, sonst $\neq 0$ ist. Es sei $h_\lambda(z)$ der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von $H_\lambda(z) : W(z)$ an der Stelle z_λ. Jetzt bilde man eine Funktion $M(z)$, die in den z_λ die Hauptteile $h_\lambda(z)$ hat, sonst eindeutig und regulär ist. Dann leistet $F(z) = W(z) \cdot M(z)$ das Verlangte, denn in der Umgebung von z_λ ist

$$M(z) = \frac{H_\lambda(z)}{W(z)} + f_\lambda(z), \qquad (f_\lambda(z) \text{ regulär in } z_\lambda).$$

Also hat $W(z) \cdot M(z) - H_\lambda(z) = W(z) \cdot f_\lambda(z)$ in z_λ eine Nullstelle von mindestens $(\beta_\lambda + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

5. Der Beweis ist ganz analog wie in K II, S. 43—45. Die Entwicklung $h_\lambda(z) = a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} z + \cdots$, $(\lambda = 1, 2, \ldots)$, ist jetzt für $|z| \leqq |z_\lambda|^2$ gleichmäßig konvergent und $g_\lambda(z)$ kann so gewählt werden, daß $|h_\lambda(z) - g_\lambda(z)| < \frac{1}{2^\lambda}$ für $|z| \leqq |z_\lambda|^2$. Dann leistet $M_0(z) = h_0(z) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} [h_\lambda(z) - g_\lambda(z)]$ wieder das Verlangte. Denn ist ϱ in $0 < \varrho < 1$ gegeben, so kann man m so wählen, daß $|z_\lambda|^2 > \varrho$ für $\lambda > m$. Daher hat

$\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}[h_\lambda(z)-g_\lambda(z)]$ Glieder, die in $|z| \leqq \varrho$ regulär sind, und ist in $|z| \leqq \varrho$ gleichmäßig konvergent, stellt also eine dort reguläre Funktion dar. Daher hat $M_0(z)$ in $|z| < \varrho$, also, da ϱ beliebig war, in $|z| < 1$ die verlangten Eigenschaften.

6. Der Beweis beruht auf denselben Gedanken wie der zur vorigen Aufgabe gegebene. Wir führen ihn nur für den Fall durch, daß ∞ weder zu M noch zu M' gehört. Um jeden Punkt z_λ legen wir den kleinsten Kreis — sein Radius heiße ϱ_λ —, der auf dem Rande mindestens einen Punkt z'_λ von M' enthält, aber im Innern keinen Punkt von M' enthält. Da M' abgeschlossen ist (warum?), ist ein solcher Kreis stets vorhanden und es strebt $\varrho_\lambda \to 0$. Die Entwicklung von $h_\lambda(z)$ für das Außengebiet $|z-z'_\lambda| > \varrho_\lambda$ sei $h_\lambda(z) = b_0^{(\lambda)} + \frac{b_1^{(\lambda)}}{z-z'_\lambda} + \cdots$. Da sie für $|z-z'_\lambda| \geqq 2\varrho_\lambda$ gleichmäßig konvergiert, können wir einen so langen Anfang der Reihe (er werde wieder mit $g_\lambda(z)$ bezeichnet) wählen, daß $|h_\lambda - g_\lambda| < \frac{1}{2^\lambda}$ bleibt für $|z-z'_\lambda| \geqq 2\varrho_\lambda$. Dann leistet

$$F(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty}[h_\lambda(z)-g_\lambda(z)]$$

das Verlangte. Denn ist $\overline{G}$ ein abgeschlossenes Gebiet, das einschließlich seines Randes keinen Punkt von M' enthält, so ist die kleinste Entfernung eines Punktes von $\overline{G}$ und eines Punktes von M' noch positiv. Sie heiße p. Wir wählen nun m so groß, daß $\varrho_\lambda < \frac{1}{2}p$ ist für $\lambda > m$. Dann sind die Glieder der Reihe $F_m(z) = \sum_{\lambda=m+1}^{\infty}(h_\lambda - g_\lambda)$ in $\overline{G}$ regulär und ihrem Betrage nach $< 1:2^\lambda$. Also ist F_m in $\overline{G}$ regulär und F leistet in $\overline{G}$ das Verlangte. Da nun $\overline{G}$ beliebig war, so genügt F den Bedingungen der Aufgabe.

Zusatz: Gehört ∞ zu M oder M', so hat man einen Punkt ζ einzuführen, der weder zu M noch zu M' gehört, und die $h_\lambda(z)$ nach Potenzen von $\left(\frac{z-\zeta}{z-z'_\lambda}\right)$ zu entwickeln.

7. Der Satz wird lauten: Ist M eine beliebige isolierte Punktmenge, deren Punkte $z_1, z_2, \ldots$ sind, ist M' die Menge der Häufungspunkte und ist jedem z_λ eine natürliche Zahl α_λ zugeordnet, so kann man ein unendliches Produkt aufstellen, das in jedem abgeschlossenen Gebiete $\overline{G}$, das keinen Punkt von M' enthält, gleichmäßig konvergiert und dort eine reguläre Funktion darstellt, die in den zu $\overline{G}$ gehörigen Punkten z_λ je eine Nullstelle der Ordnung α_λ hat, sonst in $\overline{G}$ aber $\neq 0$ ist. — Der Beweis ergibt sich, genau wie bei Aufg. 2, indem man den Satz der vorigen Aufgabe mit $h_\lambda(z) = \frac{\alpha_\lambda}{z - z_\lambda}$ heranzieht und das von 0 bis z genommene Integral der konstruierten Funktion in den Exponenten von e setzt. Man erhält

$$W(z) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z_\lambda - z'_\lambda}{z - z_\lambda}\right) e^{G_\lambda(z)}\right]^{\alpha_\lambda},$$

wobei $G_\lambda(z)$ die Form

$$\left(\frac{z_\lambda - z'_\lambda}{z - z_\lambda}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z_\lambda - z'_\lambda}{z - z_\lambda}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n_\lambda + 1}\left(\frac{z_\lambda - z'_\lambda}{z - z_\lambda}\right)^{n_\lambda + 1} \text{ hat.}$$

8. Die Lösung ergibt sich unter Benutzung der in den beiden vorangehenden Aufgaben gegebenen Verallgemeinerungen des Weierstraßschen Produktsatzes und des Mittag-Lefflerschen Partialbruchsatzes genau wie die von § 10, Aufg. 6.

9. Die Lösung ergibt sich unter Benutzung der in den Aufg. 6 und 7 gegebenen Verallgemeinerungen des Weierstraßschen Produktsatzes und des Mittag-Lefflerschen Partialbruchsatzes genau wie die der Aufg. 4.

§ 12. Meromorphe Funktionen.

1. Wir zeigen zunächst, daß die Folge der Funktionen

$$\frac{1}{g_n(z)} = \bar{g}_n(z) = \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n^z \cdot n!}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

für jedes $R > 0$ in $|z| \leqq R$ gleichmäßig konvergiert. In der Tat ist (s. K II, S. 36) $\bar{g}_n(z) = e^{\delta_n z} \cdot P_n(z)$, wenn

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \delta_n, \quad z \cdot \prod_{\lambda=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{z}{\lambda}\right) e^{-\frac{z}{\lambda}}\right] = P_n(z)$$

gesetzt wird. Nach K II, S. 20 und dem Beweis des Weierstraßschen Produktsatzes ist die Folge der $P_n(z)$ in $|z| \leqq R$ gleichmäßig konvergent. Wegen $\delta_n \to C$ gilt dies offenbar auch von der Folge $e^{\delta_n z}$. Daraus erschließt man leicht die Behauptung.

Doch fahren wir so fort: Nach dem Gesagten gibt es jedenfalls eine Konstante A, so daß für alle n und alle $|z| \leqq R$ stets $|\bar{g}_n(z)| < A$ bleibt. Dann ist aber für alle diese n und z (vgl. § 2, Anfg. 4)

$$|\bar{g}_{n+1}(z) - \bar{g}_n(z)| \leqq A \cdot \left|\left(1 + \frac{z}{n+1}\right)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^z - 1\right| < \frac{B}{n^2},$$

wenn B eine geeignete neue Konstante bedeutet. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{g}_{n+1} - \bar{g}_n)$, ja sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{g}_{n+1} - \bar{g}_n|$ in $|z| \leqq R$ gleichmäßig konvergent. Also gilt das gleiche von $\lim_{n \to \infty} \bar{g}_n(z)$.

Ist nun G ein Gebiet der in der Aufgabe genannten Art, so sind alle Glieder der Folge $\bar{g}_n(z)$ in G von 0 verschieden und ebenso der Grenzwert. Also gibt es eine positive Zahl α, so daß für alle z in G und alle n stets $\bar{g}_n(z) \geqq \alpha$ bleibt. Dann ist aber mit $\bar{g}_n(z)$ auch $\frac{1}{\bar{g}_n(z)} = g_n(z)$ in G gleichmäßig konvergent, wie aus der dort gültigen Abschätzung $|g_{n+k} - g_{n+1}| \leqq \frac{1}{\alpha^2} |\bar{g}_{n+k} - \bar{g}_{n+1}|$ zu ersehen ist.

Die Abschätzung $|g_{n+1} - g_n| \leqq \frac{1}{\alpha^2} |\bar{g}_{n+1} - \bar{g}_n|$ lehrt zugleich, daß auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1} - g_n|$ gleichmäßig in G konvergiert.

2. Hat $g_n(z)$ die Bedeutung aus Aufg. 1, so handelt es sich um $\lim_{n \to \infty} \frac{g_n(z_2)}{g_n(z_1)} \cdot n^{z_1 - z_2}$. Da $g_n(z)$ für jedes in Betracht kommende z einen endlichen und von 0 verschiedenen Grenzwert hat, ist dieser Limes dann und nur dann vorhanden, wenn $\Re(z_2) > \Re(z_1)$ ist. Er ist dann $= 0$.

3. Es sei $f(z)$ für ein bestimmtes $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ konvergent. Dann ist, wenn $g_n(z)$ die Bedeutung aus Aufg. 1 hat,

$$\frac{n!\, a_n}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \frac{a_n}{n^z} \cdot g_n(z).$$

Nach I, § 3, Aufg. 12 ist also auch die Reihe $\Omega(z)$ konvergent. Denn die Bedingungen jener Aufgabe sind gewiß erfüllt, wenn die dortigen Reihen $\sum a_n$ und $\sum |b_n - b_{n+1}|$ konvergieren. Daß aber die letztere in unserm Falle (d. h. für $b_n = g_n(z)$) konvergiert, ist bei Aufg. 1 dieses Paragraphen gezeigt worden.

Das Umgekehrte folgt wegen $\frac{a_n}{n^z} = \frac{n!\, a_n}{z(z+1)\ldots(z+n)} \cdot \bar{g}_n(z)$ genau ebenso, da auch $\sum |\bar{g}_n - \bar{g}_{n+1}|$ als konvergent erwiesen ist.

4. Dies folgt genau ebenso, wie bei der vorigen Aufgabe, unter Heranziehung von I, § 9, Aufg. 4. Denn die beiden Reihen $\sum |g_{n+1}(z) - g_n(z)|$ und $\sum |\bar{g}_{n+1}(z) - \bar{g}_n(z)|$ sind in jedem Gebiete der jetzt in Betracht kommenden Art nach Aufg. 1 gleichmäßig konvergent.

5. Dies folgt genau wie bei Aufg. 3, da aus der Konvergenz von $\sum |g_n - g_{n+1}|$ erst recht diejenige von $\sum \big||g_n| - |g_{n+1}|\big|$ folgt, — und analog für $\bar{g}_n$.

6. Hat $g_n(z)$ dieselbe Bedeutung wie in Aufg. 1, so handelt es sich um den Grenzwert von

$$\frac{g_n(z)}{g_{n+p_n}(z)} \cdot \left(1 + \frac{p_n}{n}\right)^z.$$

Da hier der erste Faktor $\to 1$ strebt (offenbar bei sinngemäßer Deutung auch für $z = 0, -1, -2, \ldots$), so ist der Grenzwert des ganzen Ausdrucks dann und nur dann $= 1$, wenn $p_n : n \to 0$ strebt.

7. Aus der Produktdarstellung von $1 : \Gamma(z) = K(z)$ in K II, S. 37 folgt durch logarithmische Differentiation

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C - \frac{1}{z} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{z}{\lambda(z+\lambda)}.$$

Da nun (Figur!) für alle in Betracht kommenden z und λ

$$1)\quad |z| \geqq 2, \quad 2)\ |z+\lambda| \geqq |z+1|, \quad 3)\ |z+\lambda| \geqq \lambda - 1$$

ist, so folgt hieraus

$$\left|\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right| \leqq 1 + \frac{1}{2} + |z| \cdot \sum_{\lambda=1}^{[|z|]} \frac{1}{\lambda \cdot |z+1|} + |z| \cdot \sum_{\lambda=[|z|]+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}$$

$$< 2 + \frac{|z|}{|z+1|}(\log|z| + 1) + |z| \cdot \frac{1}{|z|-1} < A \cdot \log|z|.$$

8. Nach I, §10, Aufg. 3a[1]) ist $b_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\log k)^n}{k^2}$. Es handelt sich also um den Beweis der Beziehung

$$(*) \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\log k)^n}{k^2} \sim n!$$

Nun lehrt Differentiation, daß $\frac{(\log x)^n}{x^2}$ für $x = e^{\frac{n}{2}}$ ein Maximum erreicht, vorher monoton steigt, dann monoton fällt.

[1]) In der Lösung dieser Aufgabe fehlt bei a_k das Vorzeichen $(-1)^k$.

Das Maximum selbst ist $= \frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{n!}{2^n}$ (vgl. § 5, Aufg. 7).

Setzen wir nun $\left[e^{\frac{n}{2}}\right] + 1 = m$, so ist zunächst für $k \geqq m$

$$\frac{\log^n (k+1)}{(k+1)^2} < \int_k^{k+1} \frac{\log^n x}{x^2}\, d\,x < \frac{\log^n k}{k^2}.$$

Schreibt man dies für $k = m,\ m+1, \ldots$ an und addiert, so folgt, wenn wir die Summe unserer Reihe in (*) mit S_n bezeichnen

$$S_n - A_m < \int_1^\infty \frac{\log^n x}{x^2}\, d\,x - J_m < S_n - A_{m-1};$$

hierbei soll A_p die p^{te} Teilsumme unserer Reihe und J_m das Integral von 1 bis m bedeuten. Nun ist $(x = e^t)$ $\int_1^\infty \frac{\log^n x}{x^2}\, d\,x = n!$ und folglich

$$\frac{J_m - A_m}{n!} < 1 - \frac{1}{n!} S_n < \frac{J_m - A_{m-1}}{n!}.$$

Hier ist aber wegen des oben berechneten Maximums die linke wie die rechte Seite ihrem Betrage nach

$$< \frac{2}{n!} \cdot \frac{n!}{2^n} \cdot \left(e^{\frac{n}{2}} + 1\right) < 4 \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^n.$$

Da dies $\rightarrow 0$ strebt, ist unsere Behauptung „$S_n : n! \rightarrow 1$" bewiesen. — Sie lehrt, daß $+1$ eine singuläre Stelle der ζ-Funktion ist. Unsere Abschätzung lehrt aber weiter, daß $\zeta(z) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n = \zeta(z) - \frac{1}{z-1}$ mindestens im Kreise $|z-2| < \frac{2}{\sqrt{e}}$ regulär ist, daß also $\zeta(z)$ in $+1$ nur einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $+1$ besitzt.

9. Macht man eine analoge Abschätzung derjenigen Glieder der Reihe in (*), s. vorige Aufgabe, für die $k \leqq m$ ist, wie wir sie eben für die Glieder mit $k \geqq m$ durchgeführt

haben, so findet man genauer, daß S_n und das Integral $\int_1^\infty \frac{\log^n x}{x^2}\,dx = n!$ sich um weniger als 2 Glieder der Reihe unterscheiden, d. h. daß

$$|S_n - n!| < 2\frac{n!}{2^n}, \qquad \left|\frac{1}{n!}S_n - 1\right| < \frac{2}{2^n}$$

ist. Dies lehrt, daß $\zeta(z)$, von dem festgestellten Pol abgesehen, sogar in $|z-2| < 2$ regulär ist.

IV. Kapitel.

Periodische Funktionen.

§ 13. Einfach-periodische Funktionen.

1. Denn sonst hätte sie auch alle Zahlen $n + n'\sqrt{2}$ zu Perioden ($n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Diese Zahlen liegen aber auf der reellen Achse überall dicht, d. h. jeder dortige Punkt ist Häufungspunkt der genannten Zahlen. Nach K II, § 7, Satz 2 kann das nicht eintreten.

2. Eine periodische Funktion nimmt jeden Wert, den sie überhaupt annimmt, unendlich oft an, eine rationale Funktion dagegen nicht.

Vorbemerkung zu den Lösungen 3—7: Die Aufgaben 3—7 erledigen sich sehr einfach durch die Bemerkung, daß bei der K II, S. 65ff. durchgeführten Transformation der Funktionen $f(z)$ in die rationalen Funktionen $\varphi(\zeta)$ dem „oberen Ende" des Periodenstreifens vermöge $\zeta = e^{2\pi i z}$ offenbar eine Annäherung an $\zeta = 0$ und dem „unteren Ende" ebenso eine Annäherung an $\zeta = \infty$ entspricht.

3. (Vgl. die Vorbemerkung.) Ist $f(z)$ im Streifen eindeutig und regulär, so ist $\varphi(\zeta)$ in der ganzen Ebene, außer etwa in 0 und ∞, eindeutig und regulär. Soll $\varphi(\zeta)$ überdies bei Annäherung an 0 und an ∞ beschränkt bleiben, so wäre $\varphi(\zeta)$ nach dem Riemannschen Satz, K I, S. 131, auch in 0

und ∞ regulär. Eine nichtkonstante Funktion kann aber nicht in der ganzen Ebene einschließlich ∞ regulär sein.

4. (Vgl. die Vorbemerkung zu Aufg. 3 und die Lösung von Aufg. 3.) Bleibt $\varphi(\zeta)$ bei $\zeta \to 0$ beschränkt, so ist $\varphi(\zeta)$ nach dem Riemannschen Satz in $\zeta = 0$ regulär, also $\lim \varphi(\zeta)$ für $\zeta \to 0$ vorhanden. Also hat $f(z)$ einen Grenzwert, wenn z sich gegen das obere Ende des Streifens bewegt. Analog für das untere Ende. Als Ordnung, mit der dabei $f(z)$ den Wert a annimmt, wird man die Ordnung der Nullstelle von $\varphi(\zeta) - a$ in 0 bzw. ∞ ansehen.

5. (Vgl. die Vorbemerkung zu Aufg. 3 und die vorangehenden Lösungen.) Bleibt $\varphi(\zeta)$ bei $\zeta \to 0$ nicht beschränkt, so muß $\varphi(\zeta)$, da es eine rationale Funktion ist, bestimmt unendlich werden (d. h. $|\varphi(\zeta)| > G$ für $|\zeta| < \delta$) und also einen Pol in $\zeta = 0$ besitzen. Die Ordnung dieses Poles wird man als Ordnung des am oberen Ende des Streifens gelegenen Poles von $f(z)$ ansehen. Analog für das untere Ende.

6. (Vgl. die Vorbemerkung zu Aufg. 3 und die vorangehenden Lösungen.) Denn eine rationale Funktion nimmt jeden Wert (einschließlich ∞) gleich oft an, wofern man eine a-Stelle der Ordnung α wie üblich α-mal als a-Stelle zählt. (Ein Pol gilt hierbei als ∞-Stelle.)

7. (Vgl. die Vorbemerkung zu Aufg. 3 und die vorangehenden Lösungen.) Denn $\varphi(\zeta)$ soll eine rationale Funktion sein (s. K I, § 36, Satz 1 und 2).

8. Er besagt, daß $h_0''(z)$ die — nicht notwendig primitive — Periode 1 hat und an den Enden des Streifens beschränkt, ja sogar beliebig klein ist.

§ 14. Doppelt-periodische Funktionen.

1. Alle Perioden haben die Form $n\,\omega + n'\,\omega'$. Damit nun zwei Perioden, etwa $\Omega = k\,\omega + k'\omega'$ und $\Omega' = l\,\omega + l'\omega'$ wieder ein primitives Paar bilden ($k, l, n, k', \ldots$ bedeuten

hier reelle ganze Zahlen), ist es notwendig und hinreichend, daß sich alle Perioden auch in der Form $n\Omega + n'\Omega'$ darstellen lassen. Aus der Definition von Ω und Ω' folgt nun

$$\omega = \frac{1}{kl' - k'l}(l'\Omega - k'\Omega'), \quad \omega' = \frac{1}{kl' - k'l}(-l\Omega + k\Omega').$$

Damit die Koeffizienten von Ω und Ω' wieder ganze Zahlen sind, muß $kl' - k'l = \delta$ ein Teiler von k, k', l, l', also δ^2 ein Teiler von δ, δ selbst ein Teiler von 1, also $\delta = \pm 1$ sein. Dies reicht auch hin; denn, wenn $\delta = \pm 1$, lassen sich ω und ω' und folglich überhaupt alle Perioden in der Form $n\Omega + n'\Omega'$ darstellen. Man erhält also alle primitiven Periodenpaare Ω, Ω', wenn k, k', l, l' alle ganzen Zahlen durchlaufen, für die $kl' - k'l = \pm 1$ ist (geom. Bedeutung?).

2. Die gesuchte Differenz ist (vgl. Aufg. 5 in § 8 und den Beweis zu K II, § 9, Satz 4) gleich dem über den Rand eines geeigneten Periodenparallelogramms erstreckten Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot\left\{\int_a^{a+\omega} + \int_{a+\omega}^{a+\omega+\omega'} + \int_{a+\omega+\omega'}^{a+\omega'} + \int_{a+\omega'}^{a}\right\}.$$

Führt man im dritten Integral $z' = z - \omega'$ als neue Variable ein, so ist es mit dem ersten zusammen

$$= -\omega'\int_a^{a+\omega}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -\omega'\cdot[\log f(z)]_a^{a+\omega} = 2k'\pi i\cdot\omega',$$

letzteres, weil $f(z)$ in a und $a + \omega$ denselben Wert hat, die Logarithmen sich also nur um ein Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden. Ebenso gibt das zweite und vierte Integral zusammen $2k\pi i\omega$, so daß unsere Differenz $= k\omega + k'\omega'$ ist.

3. Aus $f(\Omega - z) = f(-z) = -f(z)$ folgt für $z = \frac{1}{2}\Omega$, daß $f(\frac{1}{2}\Omega) = -f(\frac{1}{2}\Omega)$ ist, was nur für $f(\frac{1}{2}\Omega) = 0$ oder $= \infty$ möglich ist. Da sich $f(z)$ auch als ungerade Funktion von $z' = z - \frac{1}{2}\Omega$ erweist, hat die Laurent-Entwicklung von $f(z)$ an der Stelle $\frac{1}{2}\Omega$ nur ungerade Potenzen.

4. a) Durch $z' = \frac{2\pi i}{\omega} z$ wird das Fundamentalparallelogramm zunächst auf dasjenige Parallelogramm abgebildet, das durch die Vektoren von 0 nach $2\pi i$ und nach $2\pi i \frac{\omega'}{\omega}$ aufgespannt wird. Durch $w = e^{z'}$ wird dieses dann auf den Kreisring $1 \geqq |w| \geqq e^{-2\pi\tau_1}$ abgebildet, wenn τ_1 den imaginären Teil von $\omega' : \omega$ bedeutet, der nach K II, S. 62, Fußnote, positiv angenommen werden darf. b) Der Translation (ω') entspricht in der w-Ebene eine Streckung im Verhältnis $1 : e^{-2\pi\tau_1}$. Den aufeinanderfolgenden Parallelogrammen entsprechen also Kreisringe, deren Radien eine geometrische Progression bilden und die die punktierte Ebene $0 < |w| < +\infty$ genau einmal erfüllen.

5. Ist $f(z) = \varphi(\zeta)$, so ist auch $f(z + \omega) = \varphi(\zeta)$, aber $f(z + \omega') = \varphi(\mu\,\zeta)$ mit $\mu = e^{2\pi i \frac{\omega'}{\omega}}$. Hat also $f(z)$ die Periode ω', so ist $\varphi(\mu\,\zeta) = \varphi(\zeta)$, d. h. $\varphi(\zeta)$ hat eine „multiplikative Periode".

6. $e^{\wp(z)}$ ist doppelt-periodisch, aber nicht elliptisch; denn die Gitterpunkte des Periodennetzes sind wesentlich singuläre Stellen der Funktion, während eine elliptische Funktion im Endlichen nur Pole hat.

7. Wir setzen $\omega = 2\alpha > 0$ und $-i\omega' = 2\beta > 0$. In der Entwicklung (s. K II, S. 48)

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k,k'}{}' \left[\frac{1}{(z - 2k\alpha - 2k'i\beta)^2} - \frac{1}{(2k\alpha + 2k'i\beta)^2}\right]$$

benennen wir die Summanden nach dem Gitterpunkt (k, k') in einem kk'-Achsensystem. Wir denken uns nun je zwei Summanden zusammengefaßt, deren Gitterpunkte zur k-Achse Spiegelbilder sind, während wir diejenigen, deren Gitterpunkte auf der k-Achse liegen, für sich lassen. Dadurch kommen die Summanden $(2k\alpha + 2k'i\beta)^{-2}$, soweit sie nicht reell sind, in Paaren konjugierter Werte zusammen. Ihr Beitrag zu $\wp(z)$ ist also in jedem Falle reell und darf für

das Weitere außer acht gelassen werden. a) Ist nun $z = x$ reell, so haben wieder je zwei der übrigen Summanden, deren Gitterpunkte zur k-Achse Spiegelbilder sind, konjugierte Werte. Also ist $\wp(x)$ reell. b) Ist $z = \alpha + iy$, so ist

$$(\alpha + iy - 2k\alpha - 2k'i\beta)^2 = (\alpha - iy + 2(k-1)\alpha + 2k'i\beta)^2,$$

also konjugiert zu $(\alpha + iy + 2(k-1)\alpha - 2k'i\beta)^2$.

Je zwei dieser Summanden sind konjugiert, deren Gitterpunkte zur Geraden $k = \frac{1}{2}$ Spiegelbilder sind. c) Ist $z = x + i\beta$, so liegen die Dinge analog bezüglich der Geraden $k' = \frac{1}{2}$. d) Ist $z = iy$, so wird $(iy - 2k\alpha - 2k'i\beta)^2 = (-iy - 2(-k)\alpha + 2k'i\beta)^2$, also konjugiert zu $(iy - 2(-k)\alpha - 2k'i\beta)^2$. Je zwei Gitterpunkte, die zur Geraden $k' = 0$ spiegelbildlich liegen, liefern konjugierte Summanden, $\wp(z)$ wird wieder reell.

Umläuft also z, bei 0 beginnend, das dort liegende Viertel des Fundamentalparallelogramms $(0 \ldots \alpha \ldots \alpha + i\beta \ldots i\beta \ldots 0)$ im positiven Sinne bis zurück nach 0, so ist $\wp(z)$ stets reell, und zwar (wegen des Gliedes z^{-2}) erst positiv groß, zuletzt negativ groß. $w = \wp(z)$ durchläuft also die reelle Achse von rechts nach links. Jeder dieser reellen Werte wird auch nur einmal angenommen, denn die in $0 \ldots \alpha$ angenommenen Werte werden auch (in umgekehrter Reihenfolge) wegen $\wp(z) = \wp(\omega - z)$ auf der Strecke $\alpha \ldots 2\alpha (= \omega)$ angenommen, — und analog für die übrigen drei Strecken. Jeder Wert w wird aber (s. K II, § 9, Satz 7) von $\wp(z)$ nur genau zweimal angenommen. Daher wird das betrachtete Viertel des Rechtecks (vgl. Bi, § 9 und Aufg. 3 u. 4 in § 20) ein-eindeutig auf die untere w-Halbebene (warum die untere?) abgebildet. Durch Spiegelung (Bi, § 10) ergibt sich endlich, daß das ganze Fundamentalrechteck auf eine zweiblättrige in den Punkten $\wp(\alpha)$, $\wp(\alpha + i\beta)$, $\wp(i\beta)$ und ∞ zusammenhängende w-Ebene abgebildet wird. (Vgl. hierzu Bi, § 14 und § 15, 8.)

8. a) Siehe K II, S. 81, Fußnote 1. b) Nach K II, S. 80 und nach a) ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3s_4 z^2 + 5s_6 z^4 + 7s_8 z^6 + \cdots,$$

also

$$\wp''(z) = \frac{6}{z^4} + 3\cdot 2\cdot 1\cdot s_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot s_6 z^2 + 7\cdot 6\cdot 5\cdot s_8 z^4 + \cdots.$$

Andererseits folgt aus $\wp'^2 = 4\wp^3 - 60s_4\wp - 140s_6$ (s. K II, S. 80) durch Differentiation und Division durch $2\wp'$, daß $\wp'' = 6\wp^2 - 30s_4$, also

$$\wp''(z) = 6\left[\frac{1}{z^4} + s_4 + 10s_6 z^2 + (9s_4^2 + 14s_8)z^4 + \cdots\right].$$

Hiernach ist $9s_4^2 + 14s_8 = 35s_8$ oder $7s_8 = 3s_4^2$. — Durch Koeffizientenvergleich bei den höheren Potenzen lassen sich auch alle weiteren s_{2m} durch s_4 und s_6, also durch g_2 und g_3 ganz und rational mit rationalen Koeffizienten ausdrücken.

9. $\wp'(z)$ ist eine ungerade elliptische Funktion und verschwindet daher (s. Aufg. 3) für die Halbperioden $\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{2}\omega'$ und $\frac{1}{2}(\omega+\omega')$. Daher sind $w = \wp(\frac{1}{2}\omega)$, $\wp(\frac{1}{2}\omega')$, $\wp(\frac{1}{2}(\omega+\omega'))$ jedenfalls Wurzeln von $4w^3 - g_2 w - g_3$. Die drei genannten Werte sind auch voneinander verschieden, denn jeder der Werte wird von der 2. Ordnung angenommen (da die zugehörige Ableitung verschwindet), und mehr als zweimal wird kein Wert angenommen.

10. Sind die Nullstellen $z_1, \ldots, z_k$ und die Pole $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ von $f(z)$ so bezeichnet wie in Aufg. 2, so ist $\sum z_\varkappa - \sum \zeta_\varkappa$ einer Periode Ω gleich. Ersetzen wir ζ_1 durch den kongruenten, aber evtl. außerhalb des zuerst gewählten Periodenparallelogramms gelegenen Punkt $\zeta_1 + \Omega$ und bezeichnen diesen wieder mit ζ_1, so ist jetzt $\sum z_\varkappa = \sum \zeta_\varkappa$. Der in der Aufgabe angeschriebene σ-Quotient erweist sich nun nach K II, § 9, S. 83 (2) als doppelt-periodisch mit den Perioden ω und ω'. Durch $f(z)$ dividiert ist er dann eine doppeltperiodische ganze Funktion, also konstant.

V. Kapitel.

Analytische Fortsetzung.

§ 15. Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises.

1. Nach I, § 11, Aufg. 7 strebt $h(z) \to +\infty$, wenn z radial $\to +1$ sich bewegt. Wird nun $a_n = g \cdot b_n + \varepsilon_n b_n$ gesetzt, so strebt $\varepsilon_n \to 0$; daher hat $\sum a_n z^n$ mindestens denselben Radius wie $\sum b_n z^n$. Wird jetzt $\varepsilon > 0$ gegeben, so wähle man m so, daß $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $n > m$. Dann ist für $z = x$ in $0 < x < 1$

$$\left|\frac{f(x)}{h(x)} - g\right| < \frac{|\varepsilon_0 b_0| + \cdots + |\varepsilon_m b_m|}{h(x)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach der Vorbemerkung kann jetzt $\delta > 0$ so angegeben werden, daß in $1 - \delta < x < 1$ die rechte Seite $< \varepsilon$ ist.

2. Er gilt nicht mehr allgemein. Denn ist z. B. $h(z) = e^{\left(\frac{1}{1-z}\right)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, so ist $b_n > 0$, $\sum b_n$ divergent (warum?), aber nach § 3, Aufg. 7a strebt $h(z)$ nicht $\to \infty$, sondern gegen 0, wenn z sich z. B. so $\to +1$ bewegt, daß $\operatorname{arc}(1 - z) = \frac{2\pi}{3}$ ist. Man zeigt nun leicht, daß $f(z) = h(z) + \frac{1}{1-z} = \sum a_n z^n = \sum (b_n + 1) z^n$ ein Gegenbeispiel gegen die geplante Erweiterung des Satzes der vorigen Aufgabe bildet. Ist aber $h(z)$ so beschaffen, daß es nach Wahl des Dreiecks $z_1 z_2 1$ eine Konstante $\gamma > 0$ gibt, so daß für alle von $+1$ verschiedenen Punkte z dieses Dreiecks $|h(z)| : h(|z|) \geqq \gamma$ bleibt, so bleibt der Satz richtig. Denn es ist jetzt für die genannten z

$$\left|\frac{f(z)}{h(z)} - g\right| \leqq \left\{\frac{|\varepsilon_0 b_0| + \cdots + |\varepsilon_m b_m|}{h(|z|)} + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cdot \frac{h(|z|)}{|h(z)|}$$

$$\leqq \frac{1}{\gamma} \cdot \varepsilon \quad \text{für alle } z \text{ des Dreiecks,}$$

für die $1-\delta < |z| < 1$ ist $(\delta = \delta(\varepsilon))$. Da γ fest, $\varepsilon > 0$ beliebig, liegt hierin der Beweis.

3. $h(z) = \frac{1}{1-z} = \sum z^n$ erfüllt nach I, § 1, Aufg. 13 die in der vorigen Lösung formulierte Bedingung $|h(z)| : h(|z|) \geqq \gamma$. Also strebt bei Annäherung an $+1$, sofern z in einem festen Dreieck $z_1 z_2 1$ bleibt,

$$\frac{f(z)}{h(z)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

4. Aus $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ folgt $\frac{1}{1-z} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ und $\frac{1}{(1-z)^2} F(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (s_0 + s_1 + \cdots + s_n) z^n$. Wendet man auf diese Funktion $f(z)$ und auf $h(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$ den Satz aus Aufg. 2 an, so folgt bei Annäherung von z an 1 im Innern des Dreiecks:

$$\frac{f(z)}{h(z)} = F(z) \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = s .$$

Denn es ist $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$ und dies $h(z)$ erfüllt nach I, § 1, Aufg. 13 die Bedingung $h(|z|) : |h(z)| \leqq K^2$ für $z \neq +1$ im Dreieck.

5. a) Beweis nach Aufg. 4. Es ist $s_n = 1$ für $(2m-2)^2 \leqq n < (2m-1)^2$ und $s_n = 0$ für $(2m-1)^2 \leqq n < (2m)^2$, $m = 1, 2, \ldots$. Daher strebt, wie man leicht nachrechnet, $\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$, womit der Beweis schon vollendet.

b) Erweitert man mit $(1-z)^{-1}$, so kann die Funktion so geschrieben werden:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} ([\sqrt{n}] + 1) z^n}{(1-z)^{-\frac{3}{2}}} = \frac{f(z)}{h(z)} = \frac{\sum a_n z^n}{\sum b_n z^n} .$$

Nach Aufg. 1 und 2 genügt es, $b_n > 0$, die Divergenz von $\sum b_n$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und $\frac{|h(z)|}{h(|z|)} \geqq \gamma$ zu beweisen. Nun ist gewiß $b_n > 0$ und

$$\frac{1}{b_n} = \frac{n!\, n^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)\ldots(\frac{3}{2}+n)} \cdot \frac{\frac{3}{2}+n}{n^{\frac{3}{2}}} \cong \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \Gamma(\tfrac{3}{2}),$$

so daß $\sum b_n$ divergiert und $\frac{a_n}{b_n} \to \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ strebt. Überdies ist $\frac{h(|z|)}{|h(z)|} = \left(\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)^{\frac{3}{2}}$ nach I, § 1, Aufg. 13 beschränkt.

c) Erweitert man noch mit $(1-z)^{-1}$, so handelt es sich um $\frac{a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots}{z + \left(1+\frac{1}{2}\right)z^2 + \cdots + \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z^n + \cdots}$, wenn a_n abzählt, wie viele der Zahlen $p^0, p^1, \ldots \leqq n$ sind. Es ist also $a_n = \left[\frac{\log n}{\log p}\right] + 1$ und daher $\frac{a_n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{\log p}$, womit nach Aufg. 1 und 2 der Beweis schon vollendet. Denn $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ist > 0, $\sum b_n$ divergiert, und es ist (s. I, § 1, Aufg. 13)

$$\frac{\sum b_n |z|^n}{|\sum b_n z^n|} = \frac{|1-z|}{1-|z|} \cdot \frac{\log(1-|z|)}{|\log(1-z)|} \leqq K \cdot \frac{\log\frac{K}{\varrho}}{\log\frac{1}{\varrho}},$$

wenn $1 - z = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ gesetzt wird. Der Quotient bleibt also für alle $z \neq 1$, die hinreichend nahe an $+1$ im Dreieck $z_1 z_2 1$ liegen, unter einer festen Schranke.

d) Beweis nach Aufg. 1 und 2. Wird $a_0 = 0$ und $n^p = a_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ sowie $(1-z)^{-p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, also $b_n = \binom{n+p}{n}$ gesetzt, so ist $b_n > 0$, $\sum b_n$ divergent und es strebt $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n!\, n^{p+1}}{(p+1)\ldots(p+1+n)} \cdot \frac{p+1+n}{n} \to \Gamma(p+1)$.

Endlich ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n |z|^n : \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right| = \left| \frac{1-z}{1-|z|} \right|^{p+1} \leqq K^{p+1}$.

6. Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = s + (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) z^n.$$

Wird also $\sqrt{n}\,(s_n - s) = \varepsilon_n$ mit $\varepsilon_n \to 0$ gesetzt, so genügt es, zu zeigen, daß

$$(*) \qquad \left| (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} z^n \right| \leqq \frac{|1-z|}{\sqrt{1-|z|}} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon_n|}{\sqrt{n}} |z|^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n |z|^n} \to 0$$

strebt. Hierbei wurde

$$\frac{1}{\sqrt{1-|z|}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |z|^n, \qquad \text{also} \qquad b_n = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$$

gesetzt. Nach K II, S. 51/52, Fußnote, ist $b_n > 0$, und $b_n \cong \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, also $\sum b_n$ divergent. Nach Aufg. 1 strebt also der zweite Faktor in (*) gegen 0. Es bleibt also zu zeigen, daß $\frac{|1-z|}{\sqrt{1-|z|}}$ für alle $z \neq 1$ mit $\Re(z) \geqq 0$ m der in der Aufgabe genannten Ellipse beschränkt bleibt. Es ist aber für diese $z = x + iy$

$$\frac{|1-z|^2}{1-|z|} = \frac{(1-x)^2 + y^2}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \leqq \frac{(1-x)^2 + \alpha^2 (1-x^2)}{1 - \sqrt{\alpha^2 + (1-\alpha^2) x^2}}.$$

Für $x \to +1$ strebt dies $\to \frac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}$. Also bleibt der Ausdruck beschränkt für die genannten z.

7. a) $f_1(z)$ ist eine gewöhnliche Potenzreihe mit dem Radius 1, die in $z = +1$ konvergiert. Also ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz (I, § 11, Aufg. 10)

$$\lim f_1(z) = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + + - \cdots = s.$$

(Bekanntlich ist $s = \frac{3}{2}\log 2$; Beweis?) Der Limes der Funktion für $z \to +1$ stimmt also mit dem Werte der darstellenden Reihe für $z = +1$ überein.

b) Für $|z| < 1$ ist die Reihe für $f_2(z)$ absolut konvergent, darf also umgeordnet werden:

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \log(1+z).$$

Daher ist $\lim f_2(z) = \log 2$. Der Wert der Reihe für $z = +1$ ist aber wieder $= s = \frac{3}{2}\log 2$, also von dem Limes der Funktion für $z \to +1$ verschieden.

8. Für eine abgeschlossene, abzählbare Menge von Randpunkten ist die Konstruktion einer Potenzreihe der verlangten Art ganz ähnlich wie bei I, § 4, Aufg. 14 möglich: Bilden die abzählbar vielen, auf $|z| = 1$ gelegenen Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ dort eine abgeschlossene Menge, so läßt sich zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{z_2^n} + \cdots + \frac{1}{2^k}\frac{1}{z_k^n} + \cdots\right) z^n$$

den Radius 1 hat und auf dem Rande des Einheitskreises für alle $z \neq z_k$ konvergiert, für jedes $z = z_k$ dagegen divergiert. Da der Betrag des in der runden Klammer stehenden Ausdruckes $\leqq 1$ ist, so hat die Reihe mindestens den Radius 1.

Für festes $k = 1, 2, \ldots$ und festes $z \neq z_k$, $|z| = 1$ ist nun die Reihe

$$\frac{1}{2^k}\left(\frac{z}{z_k}\right) + \frac{1}{2^k}\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2^k}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_k}\right)^n + \cdots$$

nach I, § 4, Aufg. 5 konvergent. Ihre Summe nennen wir Z_k; es ist Z_k gleich dem Hauptwert von $\frac{1}{2^k}\log\frac{z_k}{z_k - z}$. Ist also z von allen z_k verschieden und also, da die Menge der z_k abgeschlossen sein sollte, $|z - z_k| \geqq \alpha > 0$ für alle k, so ist ersichtlich auch $\sum Z_k$ konvergent. Wir denken uns nun die obige Reihe für $k = 1, 2, \ldots$ zeilenweis untereinandergeschrieben. Dann bildet, wie man

sofort sieht, auch jede Spalte eine konvergente Reihe $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^n = S_n$, $n = 1, 2, \ldots$, und unsere Behauptung lautet, daß $\sum S_n$ konvergiert. Dazu bezeichnen wir die „Zeilenreste“, d. h. die beim n^{ten} Gliede begonnene Reihe Z_k, mit $r_n^{(k)}$. Dann ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} r_n^{(k)} = R_n$ konvergent und ihre Summe ist $= \sum Z_k - (S_1 + \cdots + S_{n-1})$. Hiernach ist $S_1 + \cdots + S_{n-1} = \sum Z_k - R_n$. Nun ist aber (vgl. die Beweise zu I, § 3, Aufg. 12 u. 13)

$$|r_n^{(k)}| \leqq \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{\alpha}, \quad \text{also} \quad |R_n| \leqq \frac{2}{\alpha n}.$$

Daher strebt $R_n \to 0$ und $\sum S_n$ ist konvergent. — Daß die Reihe für ein $z = z_m$ divergiert, erkennt man sofort, wenn man die dem z_m entsprechenden Summanden absondert und die Divergenz von $\sum\frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_m}\right)^n$ für $z = z_m$ berücksichtigt. — Für eine nicht abgeschlossene Menge (z_k) ist die Konstruktion eines entsprechenden Beispiels schwieriger (vgl. L. Neder, Mathemat. Zeitschrift, Bd. 6, S. 262).

9. Die vorgelegte Funktion ist

$$= \frac{1}{2i}\left[(1-z)^{-i+1} - (1-z)^{i+1}\right].$$

Der Entwicklungskoeffizient von z^n ist gleich dem imaginären Teil von $(-1)^n\binom{-i+1}{n}$, also seinem Betrage nach kleiner als der Betrag dieses Binomialkoeffizienten. Dieser Betrag ist aber (vgl. § 5, Aufg. 5)

$$= \frac{\sqrt{2}}{n(n-1)}\sqrt{\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{(n-2)^2}\right)}.$$

Da für $n \to \infty$ die Wurzel einem endlichen Grenzwert zustrebt (s. K. II, § 2, Satz 4), so folgt hieraus die Behauptung.

§ 16. Analytische Fortsetzung von Potenzreihen.

1. Wegen $\mathfrak{P}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$ ist $\mathfrak{P}^{(k)}(z) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}$. Demnach lautet die Entwicklung an der Stelle z_1:

$$\mathfrak{P}(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{z-z_1}{1-z_1}\right)^n = \mathfrak{P}(z_1) + \mathfrak{P}\left(\frac{z-z_1}{1-z_1}\right).$$

Wegen $|1-z_1| = 1$ ist der Radius wieder $= 1$, so daß insbesondere z_2 in das Innere des neuen Kreises fällt. — Wegen

$$\frac{d}{dz}\mathfrak{P}\left(\frac{z-z_1}{1-z_1}\right) = \frac{1}{1-z_1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-z_1}{1-z_1}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

ist $\frac{d^k}{dz^k}\mathfrak{P}\left(\frac{z-z_1}{1-z_1}\right) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}$, und die Entwicklung an der Stelle z_2 lautet

$$\mathfrak{P}(z_1) + \mathfrak{P}\left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1}\right) + \mathfrak{P}\left(\frac{z-z_2}{1-z_2}\right).$$

Nach p Schritten findet man an der Stelle $z_p = z_0 = 0$ die Entwicklung

$$\mathfrak{P}(z_1) + \mathfrak{P}\left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1}\right) + \cdots + \mathfrak{P}\left(\frac{z_p-z_{p-1}}{1-z_{p-1}}\right) + \mathfrak{P}\left(\frac{z-z_p}{1-z_p}\right).$$

Da die neu aufgetretene Potenzreihe $\equiv \mathfrak{P}(z)$ ist, so hat sich ergeben, daß $\mathfrak{P}(z)$ um 1 herum fortgesetzt werden kann, und bei der Rückkehr ist nur die additive Konstante

$$\mathfrak{P}(z_1) + \mathfrak{P}\left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1}\right) + \cdots + \mathfrak{P}\left(\frac{z_p-z_{p-1}}{1-z_{p-1}}\right)$$

hinzugetreten. Nun rechnet man sofort nach, daß hier alle p Argumente einander gleich, also alle $= z_1$ sind. Die Konstante ist also

$$= p\,\mathfrak{P}(z_1) = p\cdot\left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{p}}\right)\left[1 + \frac{z_1}{2} + \frac{z_1^2}{3} + \cdots\right].$$

Da dieser Wert nicht von p abhängt, so kann man ihn bestimmen, indem man $p \to \infty$ streben läßt; dann strebt

$z_1 \to 0$, also die eckige Klammer $\to 1$, das davorstehende Produkt aber offenbar $\to 2\pi i$.

2. Ist c das Residuum des Poles, so ist $f(z) - \frac{c}{z - z_0}$ auch in z_0 regulär und somit in einem Kreise $|z| < R$, dessen Radius $R > |z_0| = r$ ist. Setzen wir $f(z) - \frac{c}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, so strebt insbesondere $b_n z_0^n \to 0$. Nun ist aber

$$\frac{c}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{c}{z_0^{n+1}}\right) z^n \quad \text{und also} \quad a_n = b_n - \frac{c}{z_0^{n+1}}.$$

Nun sieht man, daß

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b_n z_0^{n+1} - c}{b_{n+1} z_0^{n+2} - c} \cdot z_0 \to z_0 \quad \text{strebt.}$$

3. Wegen $\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} \zeta^{k+n+1}$ ist

$$\mathfrak{P}_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{n+1} \text{ mit } b_n = \binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \cdots + \binom{n}{n} a_n.$$

Ihr Radius ϱ ist gegeben durch

$$\frac{1}{\varrho} = \limsup \sqrt[n]{\left|\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \cdots + \binom{n}{n} a_n\right|}.$$

Betrachtet man nun die Kreisschar $|\zeta| = \left|\frac{z}{1+z}\right| = \alpha \geqq 0$, so liegen diese für $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ ganz im Einheitskreise, während sie für $\alpha > \frac{1}{2}$ über diesen hinausragen. Es sei nun $f(z)$ die durch die Reihe $\mathfrak{P}(z)$ und ihre (vom Nullpunkt aus) geradlinigen Fortsetzungen definierte Funktion. Dann liefert der größte jener Kreise (d. h. derjenige, der dem größten α-Wert entspricht; als sein Inneres ist der den Nullpunkt enthaltende Teil der Ebene anzusehen, welches für $\alpha > 1$ auch den Punkt ∞ enthält), der noch frei von singulären Stellen der Funktion $f(z)$ ist, durch seinen α-Wert gleichfalls den Radius ϱ von $\mathfrak{P}_1(\zeta)$. Also ist $\frac{1}{2} \leqq \varrho \leqq +\infty$.

4. Der Punkt $+1$ ist offenbar dann und nur dann singulär, wenn der Kreis $\alpha = \frac{1}{2}$ der größte der in der vorigen Aufgabe genannten Kreise ist; also dann und nur dann, wenn

$$\limsup \sqrt[n]{\left|\binom{n}{0} a_0 + \cdots + \binom{n}{n} a_n\right|} = 2.$$

Und der Punkt ist also dann und nur dann regulär, wenn dieser lim sup < 2 ist (da er ja nicht > 2 sein kann).

5. a) Hier handelt es sich um

$$\limsup \sqrt[n]{\left|\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}\right|}.$$

Da der Radikand $= (1-1)^n = 0$ ist, ist der lim sup $= 0 < 2$, also die Stelle $+1$ regulär. (Die dargestellte Funktion ist ja $= \frac{z}{1+z} = \zeta$, also eine g a n z e Funktion von ζ.)

b) Hier handelt es sich um

$$\limsup \sqrt[n]{\left|\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n}{n}\right|}.$$

Der Radikand ist hier die n^{te} Differenz der Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, also (wie man leicht nachprüft) $= \frac{1}{n+1}$. Der lim sup ist also $= 1$. Die durch die Reihe dargestellte Funktion ist also in dem zur Schar gehörigen Kreise $\Re(z) > -\frac{1}{2}$, speziell in $+1$ regulär. Die „größeren" Kreise enthalten den Punkt ∞, so daß die Funktion in ihnen nicht mehr regulär ist.

6. Wir dürfen annehmen, daß a l l e $a_n \geqq 0$ sind und der Radius von $\sum a_n z^n$ gleich 1 ist; dann ist für gegebenes $\varepsilon > 0$ unendlich oft $a_n > (1-\varepsilon)^n$. Ist $n = m$ ein solcher Index, so ist

$$\sqrt[2m]{\binom{2m}{0} a_0 + \cdots + \binom{2m}{m} a_m + \cdots + \binom{2m}{2m} a_{2m}} \geqq \sqrt[2m]{\binom{2m}{m}(1-\varepsilon)^m}.$$

Wegen $\binom{2m}{m} \cong \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}$ (vgl. K II, S. 51, Fußnote 2) hat also unsere Wurzel als lim sup einen Wert $\geqq 2$, also ist er $= 2$.

7. Man darf den Winkelraum symmetrisch zur reellen Achse annehmen. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß stets $\cos(\operatorname{arc} a_n) \geqq \delta$ ist. Da nun der Betrag einer Zahl größer ist als ihr reeller Teil und da $\Re(a_n) \geqq |a_n| \cdot \delta$, so ist

$$\sqrt[2m]{\left|\binom{2m}{0} a_0 + \cdots + \binom{2m}{2m} a_{2m}\right|} \geqq \sqrt[2m]{\delta \cdot \left[\binom{2m}{0}|a_0| + \cdots + \binom{2m}{2m}|a_{2m}|\right]}.$$

Nun gibt es bei gegebenem $\varepsilon > 0$ wieder unendlich viele m, so daß $|a_m| > (1 - \varepsilon)^m$. Für diese m ist die hingeschriebene Wurzel $> \sqrt[2m]{\delta \cdot \binom{2m}{m} (1 - \varepsilon)^m}$. Also ist ihr lim sup wieder $= 2$.

§ 17. Analytische Fortsetzung beliebig gegebener Funktionen.

1. Offenbar nicht, denn sie ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. Oder: Für $x > 0$ ist $F(x) = x$, also fortsetzbar und $F(z) = z$ ist die Fortsetzung. Analog ist $F(x)$ auch für $x < 0$ fortsetzbar, und die Fortsetzung ist $F(z) = -z$. Eine Funktion kann aber nicht auf zwei verschiedene Arten fortsetzbar sein (s. K I, S. 101, Satz).

2. Nicht im Sinne von K I, S. 101, daß es also ein die Strecke $-1 < x < +1$ in seinem Innern enthaltendes Gebiet G und eine dort reguläre Funktion $f(z)$ gäbe, deren Werte längs der genannten Strecke mit den dort gegebenen Werten übereinstimmen. Denn als Fortsetzung käme, wie der Werteverlauf auf $0 < x < +1$ lehrt, nur $e^{-1:z^2}$ in Betracht; diese Funktion ist aber in 0 wesentlich singulär.

3. Nach I, § 9, Aufg. 1 f. oder aus $\left|\frac{z^n}{1 - z^n}\right| \leqq \frac{1}{1 - \varrho} \cdot \varrho^n$ für $|z| \leqq \varrho$ sieht man zunächst, daß $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär ist.

Ist nun ζ eine primitive Einheitswurzel des Grades $g_0 \cdot g_1 \ldots g_p$ ($p \geqq 0$ fest), so ist für $0 < \varrho < 1$, $|z| = \varrho$,

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^{g_0 \cdots g_n}}{1 - z^{g_0 \cdots g_n}} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{\varrho^{g_0 \cdots g_n}}{1 - \varrho^{g_0 \cdots g_n}}.$$

Für $\varrho \to +1$ wächst dies (positiv bleibend) über alle Grenzen. Der fortgelassene Anfang der Reihe ist eine in ζ reguläre rationale Funktion, bleibt also bei $z \to \zeta$ beschränkt. Also ist ζ für $f(z)$ eine singuläre Stelle. Da die Punkte ζ überall dicht auf $|z| = 1$ liegen, ist $f(z)$ nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar.

4. Es sei $f(z)$ für $|z| < r$, $r > 0$, regulär. Dann lehrt (*), daß auch $f(2z)$ für $|z| < r$, also $f(z)$ für $|z| < 2r$ regulär ist; also auch für $|z| < 4r$, $< 8r$, ..., also in der ganzen Ebene. — Bei der rechten Seite von (*) ist offenbar nur wesentlich, daß hier eine ganze Funktion von $f(z)$ und seinen Ableitungen steht.

5. Für $\Re(z) > 0$ folgt aus (†)

$$(\dagger\dagger) \quad f(z + k + 1) = (z + k)(z + k - 1) \ldots (z + 1) z \cdot f(z), \quad k \geqq 0 \text{ ganz.}$$

Nun ist $f(z + k + 1)$ für $\Re(z) > -k - 1$ regulär, also auch die rechte Seite. Also hat $f(z)$ für $\Re(z) > -k - 1$ keine andern singulären Stellen als Pole 1. Ordnung in $0, -1, -2, \ldots, -k$. Für die Umgebung von $-k$ hat $f(z)$ die Form $\frac{r_k}{z + k} + f_k(z)$, wenn r_k das Residuum in $z = -k$ und $f_k(z)$ eine in $-k$ reguläre Funktion bedeutet. Aus (††) folgt nun für $z \to -k$:

$$f(1) = (-1)^k\, k!\, r_k, \quad r_k = \frac{(-1)^k}{k!} f(1).$$

6. Es sei z_0 ein Punkt von $\mathfrak{w}$. C sei ein Kreis um z_0, der in G liegt und $\mathfrak{w}$ genau zweimal trifft. Das von C umschlossene Gebiet wird dann durch $\mathfrak{w}$ in zwei Teile G_1 und

G_2 zerschnitten, deren Ränder C_1 und C_2 heißen mögen. Nun gilt, wie man sich ohne Schwierigkeit zurechtlegt, die Cauchysche Integralformel (K I, § 18) auch in diesem Fall, in dem man von $f(z)$ nur weiß, daß es innerhalb der Randkurve regulär ist und längs derselben stetige Randwerte annimmt. Danach ist für ein z aus G_1

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C_1)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z), \quad \frac{1}{2\pi i}\int^{(C_2)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0.$$

Also ist $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$. Analog zeigt man, daß diese letzte Formel auch für jedes z aus G_2 gilt. Nach K I, § 19 definiert das Integral aber eine in jedem Punkt des von C umschlossenen Gebietes reguläre Funktion. Also ist $f(z)$ auch in z_0 regulär. (Gilt die Behauptung auch für allgemeinere Wege $\mathfrak{w}$?)

7. Nach I, § 5, Aufg. 9, bei der statt des Einheitskreises natürlich auch ein Streckenzug als Randkurve betrachtet werden könnte, bilden die Randwerte eine längs $\mathfrak{w}$ stetige Funktion. Der Satz der vorigen Aufgabe vollendet nun unmittelbar den Beweis.

8. Wir bemerken zunächst, daß die Entwicklung eines jeden Elementes um einen bestimmten Punkt von G als Mittelpunkt einen Konvergenzkreis hat, der mindestens an den Rand von G stößt, da andernfalls ein auf dem Rande des Konvergenzkreises gelegener singulärer Punkt entgegen der Annahme eine Fortsetzung (z. B. in radialer Richtung) hindern würde. Der weitere Beweis ist nun indirekt. Wir nehmen an, wir wären durch die übliche Kreiskettenfortsetzung (K I, § 27) von z_0 aus zu einem Punkte z_1 mit der folgenden Eigenschaft gelangt: Es gibt einen geschlossenen Weg C von z_1 zurück nach z_1 derart, daß die Fortsetzung des bei z_1 erhaltenen Elementes längs C nicht zu demselben Element zurückführt. Es seien $z_2, z_3, \ldots, z_p = z_1$ die dabei notwendigen Mittelpunkte der Potenzreihen. Dann darf C

durch das Polygon P von z_1 über $z_2, z_3, \ldots$ nach z_1 ersetzt werden. Der weitere Gedankengang ist nun ähnlich wie beim Beweis des Cauchyschen Integralsatzes (K I, § 16): Wenn die Fortsetzung längs P nicht zum Ausgangselement zurückführt, so zerlege man P durch innere Diagonalen in Dreiecke. Man überzeugt sich dann leicht, daß mindestens ein Dreieck wieder die Eigenschaft haben muß, daß die Fortsetzung um seinen Rand nicht zum Ausgangselement zurückführt. Ist Δ ein solches Dreieck, so teile man es, wie in K I, S. 58, in vier Teile. Mindestens eins der Teildreiecke, etwa Δ_1, ist wieder ein solches Dreieck usw. Der Grenzpunkt ζ der Folge der Dreiecke Δ_n liegt innerhalb G, also auf einer Kreisscheibe, die auch ganz in G liegt und positiven Radius hat. Ist m so groß, daß Δ_m ganz innerhalb dieser Kreisscheibe liegt, so kann aber die Fortsetzung um den Rand von Δ_m sicher keine Mehrdeutigkeit in Erscheinung treten lassen. Also ist $f(z)$ überhaupt in G eindeutig.

9. Die durch $w^3 - 3w = z$ definierte algebraische Funktion (vgl. § 19, Aufg. 4d) ist dreideutig und hat in $+2$, -2, ∞ Verzweigungspunkte. In $+2$ hängen nur das 1. und 3. Blatt zusammen, das zweite liegt schlicht; in -2 dagegen hängt das 1. und 2. Blatt zusammen, während das dritte schlicht verläuft. Wählt man für G den Kreis $|z| < 4$ und für $f(z)$ einen der drei in der Umgebung von $z_0 = 0$ regulären Zweige dieser Funktion, dann kann $f(z)$ auch nach $+2$ und -2 fortgesetzt werden. Denn liegt der gegebene Zweig $f(z)$ im 1. Blatt, so führt eine Umkreisung von -2 in das 2. Blatt, in welchem man nun ungehindert nach $+2$ gelangen kann. Liegt $f(z)$ im 3. Blatt, so führen aufeinanderfolgende Umkreisungen von $+2$ und -2 wieder in das 2. Blatt, in dem man wieder nach $+2$ gehen kann. Liegt $f(z)$ im 2. Blatt, so kann man sofort nach $+2$ gehen. Analog für -2. Nach jedem andern Punkt von G gelangt man auf jedem Wege, der ± 2 vermeidet,

10. Der Beweis geht genau ebenso wie bei Aufg. 8. Nur hat man jetzt einen Punkt erst dann als „singulär“, d. h. als Hindernis für die Fortsetzung anzusehen, wenn weder die Funktion noch auch die zu ihr reziproke in den betreffenden Punkt hinein fortgesetzt werden kann.

11. Der Beweis geht wieder ebenso, nur hat man, wenn ein Punkt ζ die Fortsetzung hindert, den in $0 < |z - \zeta| < \delta$ sich ergebenden Wertevorrat durch eine Laurent-Entwicklung darzustellen.

VI. Kapitel.

Mehrdeutige Funktionen und Riemannsche Flächen.

§ 18. Mehrdeutige Funktionen im allgemeinen.

1. Offenbar ja: z. B. $\log z$ in $1 < |z| < 2$. — In einem einfach-zusammenhängenden Gebiete dagegen nicht, wie dies ja gerade die Behauptung des Monodromiesatzes ist (§ 17, Aufg. 8).

2. a) $(z-1)\sqrt{z}$ hat in dem Punkte $+1$ eines jeden der beiden Blätter den Wert 0. b) $(e^z-1)\sqrt{z}$ hat in den Punkten $z = 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ beider Blätter den Wert 0. c) In allen Punkten zweier übereinanderliegender Gebiete natürlich nicht, weil dann die auf den beiden Blättern ausgebreiteten Funktionszweige überhaupt identisch wären, diese Blätter also nicht als zwei verschiedene Blätter hätten konstruiert werden dürfen.

3. a) Zwei eindeutige Funktionen, nämlich $e^{\frac{z}{2}}$ und $-e^{\frac{z}{2}}$, deren Wertevorräte also auf zwei völlig getrennt verlaufenden Blättern auszubreiten sind.

b) Eine zweideutige Funktion, deren Wertevorrat also auf einer zweiblättrigen Fläche auszubreiten ist. Diese ist in den Punkten $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ verzweigt.

Eine Umlaufung eines dieser Punkte führt stets von dem einen in das andre Blatt.

c) Zwei eindeutige Funktionen, nämlich $+\cos z$ und $-\cos z$. (Grund: Alle Nullstellen des Radikanden sind Nullstellen 2. Ordnung.)

d) Zwei eindeutige Funktionen; denn alle Pole und alle Nullstellen des Radikanden sind von der 2. Ordnung (letztere wegen $\wp'(\frac{1}{2}\omega) = 0$). Die Wurzel liefert also in der Umgebung jedes Punktes der Ebene zwei eindeutige Funktionen. Nach § 17, Aufg. 10 haben wir also für die ganze Ebene zwei eindeutige Funktionen.

e) Wenn die beiden Nullstellen von $\wp(z)$ — über deren Lage man im allgemeinen nicht viel aussagen kann — getrennt liegen, so erhalten wir eine zweideutige Funktion. Hat aber $\wp(z)$ nur e i n e Nullstelle 2. Ordnung im Parallelogramm (was nur eintreten kann, wenn $\wp(z)$ für $\frac{1}{2}\omega$ oder $\frac{1}{2}\omega'$ oder $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$ verschwindet), so erhalten wir, wie bei d), zwei eindeutige Funktionen.

f) Unendlich viele eindeutige Funktionen, nämlich $z + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.

g) Eine unendlich vieldeutige Funktion mit Verzweigungspunkten in $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

h) Eine eindeutige Funktion, wie die Potenzreihenentwicklung zeigt.

4. Man wähle einen bestimmten Weg L_0 von 0 nach z_0. Der erhaltene Integralwert sei J_0.

Jeder andre in der schlichten z-Ebene verlaufende Weg L von 0 nach z_0 kann in der Form $(L - L_0) + L_0$ geschrieben werden, d. h. als geschlossener Weg von 0 nach 0 und von hier längs L_0 nach z_0. Es handelt sich also nur darum, das Integral längs geschlossener Wege auszuwerten. Ein solcher Weg kann nun (wofern er ± 1 vermeidet), ohne daß der Integralwert sich ändert, zunächst durch eine Aufeinanderfolge von „Schleifen" ersetzt werden, d. h. durch Wege, die

von 0 bis in die Nähe von $+1$ (bzw. -1) führen, diesen Punkt einmal umlaufen und zurück nach 0 gehen. (Durch Betrachtungen analog denen in § 1, Aufg. 6 läßt sich dies in aller Strenge zeigen.) Beachtet man, daß nach Umlaufung von ± 1 die Wurzel ihr Zeichen ändert, daß das „Schleifenintegral" um $+1$ den Wert $2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$, dasjenige um -1 den Wert $-\pi$ hat, und zwar gleichgültig, ob man die Schleife positiv oder negativ durchläuft (!), so sieht man, daß zwei nacheinander durchlaufene Schleifen entweder 2π oder 0 oder -2π liefern. Haben wir also eine gerade Anzahl Schleifen, so ist das Integral über die ganze geschlossene Kurve $= 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ist die Anzahl ungerade, so ist es gleich $2k\pi + \pi$. Im ersten Falle kehren wir nach 0 mit dem Ausgangswert der Wurzel zurück, im zweiten mit dem entgegengesetzten. Daher ist der Wert des längs L genommenen Integrals

$$= 2k\pi + J_0 \quad \text{bzw.} \quad 2k\pi + \pi - J_0.$$

Für $z_0 = \pm 1$ wird, wenn L_0 geradlinig genommen wird, $J_0 = \pm \frac{\pi}{2}$; für $z_0 = \infty$ wird das Integral divergent.

5. a) $\int_1^{z_0} \frac{dz}{\sqrt[p]{z}} = \frac{p}{p-1}\left[\frac{z}{\sqrt[p]{z}}\right]_1^{z_0}$, falls hier die dem Blatt entsprechenden Werte von $\sqrt[p]{z_0}$ bzw. $\sqrt[p]{1}$ genommen werden.

b) $\int_1^{z_0} \log z\, dz = [z(\log z - 1)]_1^{z_0}$, wenn $\log z_0$ und $\log 1$ analog wie bei a) genommen werden.

6. a) Nach I, § 11, Aufg. 4d ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, aber über den Rand $|z| = 1$ nicht fortsetzbar. Nach § 20, Aufg. 13 nimmt $f(z)$ in $|z| < 1$ keinen Wert mehr als einmal an. Da $f(0) = 0$, ist also im übrigen $f(z) \neq 0$. Daher ist $\frac{1}{z} f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und $\neq 0$, und

folglich werden durch $\sqrt{\frac{1}{z} f(z)}$ zwei in $|z| < 1$ eindeutige und reguläre Funktionen dargestellt. $F_1(z) = \sqrt{z} \cdot \sqrt{\frac{1}{z} f(z)}$ ist also eine in $|z| < 1$ zweideutige Funktion, deren Riemannsche Fläche dasjenige Stück der Fläche für $\sqrt{z}$ ist, dessen Punkte im Innern des Einheitskreises liegen.

b) Man erkennt ganz analog, daß die Riemannsche Fläche für $F_2(z)$ dasjenige Stück der Fläche für $\log z$ ist, dessen Punkte im Innern des Einheitskreises liegen.

7. $\log f(\frac{1}{2}z)$ ist in $0 < |z| < 2$ regulär und verhält sich bezüglich der Vieldeutigkeit wie $\log z$; $\log f\left(\frac{1}{2z}\right)$ ist in $0 < \left|\frac{1}{2z}\right| < 1$, d. h. in $\frac{1}{2} < |z| < +\infty$ regulär und verhält sich bezüglich der Vieldeutigkeit wie $\log \frac{1}{z}$. Also ist $G_1(z)$, die Summe beider, in $\frac{1}{2} < |z| < 2$ eindeutig und regulär. (Genauer: Der Ausdruck für $G_1(z)$ definiert unendliche viele eindeutige reguläre Funktionen, die sich aber nur um additive Konstanten der Form $2k\pi i$ unterscheiden.) Sie ist überdies über die Ränder des Ringes nicht fortsetzbar. Auch $G_2(z)$ ist in demselben Ringe regulär, über dessen Ränder nicht fortsetzbar, ändert sich aber, wenn innerhalb des Ringes einmal um die innere Kreisscheibe $|z| \leqq \frac{1}{2}$ herum im positiven Sinne fortgesetzt wird, um $4\pi i$. (Vgl. hierzu Aufg. 1 und § 17, Aufg. 8.) Die Riemannsche Fläche für $G_2(z)$ ist also derjenige Teil der Fläche für $\log z$, für dessen Punkte z die Beziehung $\frac{1}{2} < |z| < 2$ gilt.

§ 19. Spezielle mehrdeutige, insbesondere algebraische Funktionen.

Vorbemerkung zu Aufg. 1 und 2. Die Aufgaben lassen sich ganz einheitlich und einfach behandeln. Bei allen Funktionen ist sofort zu übersehen, wieviel-deutig die Funk-

tion ist, wieviel Blätter also die Riemannsche Fläche hat, wie sich die verschiedenen Werte der Funktion für dasselbe z unterscheiden (so daß mit Hilfe eines der Werte sofort alle hingeschrieben werden können), und welche Punkte $a, b, \ldots$ als etwaige Verzweigungspunkte allein in Betracht kommen. Man nimmt nun eine der Vieldeutigkeit entsprechende Anzahl von Exemplaren der z-Ebene, markiert in ihnen die als Verzweigungspunkte in Betracht kommenden Punkte (zu denen auch ∞ zu rechnen ist) und verbindet sie in irgendeiner Reihenfolge, den letzten mit ∞. Alle Verbindungen etwa geradlinig, doch so, daß sie einander nicht schneiden, was durch Änderung der Reihenfolge oder der Verbindungslinie stets möglich ist. Längs dieser Verbindungen schneidet man die Exemplare auf. Auf einem ersten Exemplar wählt man nun einen nicht auf dem Schnitt gelegenen Punkt z_0, entwickelt einen Zweig der Funktion (die sich nun in z_0 regulär verhält) für die Umgebung von z_0 und setzt dieses Funktionselement über die Ebene fort, ohne den Schnitt zu überschreiten. Dadurch wird allen Punkten des Blattes ein Funktionswert zugeordnet; längs der Schnittränder erhält man noch stetige Randwerte, — aber an beiden Ufern im allgemeinen verschiedene. Die Belegung der übrigen Blätter ist nach der oben gemachten Bemerkung von selbst gegeben. Ebenso sieht man, wie sich die Belegungen der beiden Ufer desselben Schnittes unterscheiden. Man legt nun die Blätter in bestimmter Reihenfolge übereinander und heftet die gleichbelegten Schnittränder zusammen.

Das geschieht nun im einzelnen so: Die Vieldeutigkeit der Funktion kommt in den folgenden Aufgaben ausschließlich durch das Verhalten von $\operatorname{arc}(z-a)$, $\operatorname{arc}(z-b), \ldots$ zustande. Dies Verhalten ist aber sofort zu überschauen, wenn man mit z Kurven durchläuft, die in der Nähe der Schnittränder bleiben und bestimmte der Punkte $a, b, \ldots$ um-

schließen, die andern draußen lassen. Dann wird sofort klar, wie sich die Funktionswerte an beiden Schnitträndern unterscheiden; denn allgemein vermehrt sich $\operatorname{arc}(z - z_1)$ um $+2\pi$, wenn z_1 im positiven Sinne umlaufen wird. Hiernach sind die Schnittränder der verschiedenen Blätter aneinanderzuheften.

Für die Bezeichnung dieses Zusammenheftens setzen wir noch folgendes fest: Überschreitet man in der Nähe von a einen bestimmten von a ausgehenden Schnitt in solcher Richtung, daß a zur Linken liegt, und ist dabei Blatt 1 an Blatt α_1, Blatt 2 an Blatt $\alpha_2, \ldots$ zu heften, so drücken wir dies durch die diesem Schnitt zuzuordnende Symbolik

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \end{pmatrix}_a$$

aus. Geben wir so die Art des Zusammenheftens an allen Schnitträndern an, so ist die Fläche fertig.

1. a) Drei Blätter. Je ein dreiblättriger Verzweigungspunkt in a und ∞. Übereinanderliegende Funktionswerte unterscheiden sich nur um den Faktor ω^k mit $k = 0, 1, 2$ und $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Ist im ersten Blatt w, im zweiten ωw, im dritten $\omega^2 w$ angeheftet, so sind die Blätter gemäß $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_a$ zusammenzufügen.

b) Drei Blätter. Je ein dreiblättriger Verzweigungspunkt in a und ∞. Einmaliger Umlauf um a bringt den Faktor ω^2 hinzu. Heften wir demnach im ersten Blatt w, im zweiten $\omega^2 w$, im dritten $\omega^4 w = \omega w$ an, so ist wieder gemäß $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_a$ zusammenzufügen. Die Fläche ist dann mit der vorigen identisch. Aber man darf auch ωw im zweiten, $\omega^2 w$ im dritten anheften; dann ist gemäß $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_a$ zusammenzuheften.

c) Drei Blätter. Etwaige Verzweigungspunkte a, b, ∞. Übereinanderliegende Funktionswerte unterscheiden sich nur um ω^k. Heften wir im 1., 2., 3. Blatt bzw. $w, \omega w, \omega^2 w$ an, so ist längs des Schnittes $a \ldots b$ gemäß $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}_a$ zusammenzufügen; denn bei Umkreisung von a vermehrt sich $\operatorname{arc}(z-a)$ um $+2\pi$, während $\operatorname{arc}(z-b)$ sich nicht ändert. Umkreist man a und b gleichzeitig, so vermehren sich $\operatorname{arc}(z-a)$ und $\operatorname{arc}(z-b)$ um $+2\pi$, ihre Differenz bleibt also ungeändert. In jedem einzelnen Blatt ist der Schnitt für sich zu schließen, der Schnitt $b \ldots \infty$ fällt also fort, ∞ ist kein Verzweigungspunkt, die Blätter liegen dort getrennt übereinander. (Man veranschauliche sich dies bei der Zahlenkugel.) Wir haben also eine dreiblättrige Fläche mit zwei dreiblättrigen Verzweigungen in a und b.

d) Wir beginnen genau wie bei c). Längs $a \ldots b$ ist wieder gemäß $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}_a$, längs $b \ldots \infty$ aber gemäß $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}_b$ zusammenzuheften. Wir erhalten eine dreiblättrige Fläche mit drei dreiblättrigen Verzweigungen in a, b, ∞.

e) Genau wie bei d), wenn man statt ∞ den Punkt c einführt. In ∞ verlaufen die Blätter getrennt, ∞ ist jetzt kein Verzweigungspunkt.

f) Dreiblättrige Fläche. Mögliche Verzweigungen in a_1, $a_2, \ldots, a_k$ und ∞. Analoge Erwägungen wie bei c) und d) lehren, daß längs $a_1 \ldots a_2$ die Blätter gemäß $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}_{a_1}$, längs $a_2 \ldots a_3$ gemäß $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}_{a_2}$, längs $a_3 \ldots a_4$ gemäß $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{a_3}$ zusammenzuheften sind. Dieser dritte Schnitt fällt also fort. Längs $a_4 \ldots a_5$ ist wieder gemäß $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}_{a_4}$ zusammenzufügen usw. Der Punkt ∞ ist dann und nur

dann Verzweigungspunkt (der Schnitt $b \ldots \infty$ also nicht fortzulassen), wenn k nicht durch 3 teilbar ist.

g) Sechs Blätter. Mögliche Verzweigungen in a, b, c, ∞. Die 6 Funktionswerte an einer regulären Stelle z unterscheiden sich dadurch, daß bei der Kubikwurzel ω^k, bei der Quadratwurzel (-1) als Faktor hinzutreten kann. Ist also w_1 ein Wert der Kubikwurzel, w_2 ein solcher der Quadratwurzel, so heften wir an das 1. bis 6. Blatt der Reihe nach die Werte $w_1 + w_2, \omega w_1 + w_2, \omega^2 w_1 + w_2, w_1 - w_2, \omega w_1 - w_2, \omega^2 w_1 - w_2$. Umkreist man a allein, so ändert sich nur arc $(z - a)$; man hat längs $a \ldots b$ gemäß $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}_a$ zusammenzufügen. (Man sieht, daß die drei ersten und die drei letzten Blätter je in einem „dreigliedrigen Zyklus" zusammenhängen, d. h. durch alleiniges Umkreisen von a bleibt man stets in der einen oder stets in der andern der beiden Blättergruppen.) Umkreist man a und b gleichzeitig, so vermindert sich der arc des Radikanden der Kubikwurzel um 2π; längs $b \ldots c$ ist also gemäß $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}_b$ zusammenzufügen, was wieder 2 dreigliedrige Zyklen ergibt. Umläuft man alle 3 Punkte gleichzeitig, so verhält sich die Kubikwurzel wie eben, aber die Quadratwurzel ändert noch das Zeichen. Also ist längs $c \ldots \infty$ gemäß $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_c$ zusammenzufügen. Wir haben also eine sechsblättrige Fläche mit 4 Verzweigungen in a, b, c, ∞. Indem man auch b, c und ∞ einzeln umkreist, ergibt sich noch genauer, daß in a und b je 2 dreiblättrige Verzweigungspunkte übereinanderliegen; die ersten 3 und die letzten 3 Blätter bilden je einen Zyklus. In c liegen 3 zweiblättrige Verzweigungspunkte übereinander; das 1. und 4., das 2. und 5. sowie das 3. und 6. Blatt bilden je einen zweiblättrigen Zyklus. In ∞ hängen alle 6 Blätter

zusammen und bilden dort einen einzigen sechsgliedrigen Zyklus.

h) Eine n-blättrige Fläche. Die Funktionswerte unterscheiden sich um Potenzen von $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ als Faktoren Heften wir demgemäß w an das 1. Blatt, ωw an das 2., ..., $\omega^{n-1} w$ an das n^{te}, so lehren die gleichen Erwägungen wie bisher, daß längs $a \ldots b$ gemäß $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n-1, & n \\ 2, & 3, & \ldots, & n, & 1 \end{pmatrix}_a$, längs $b \ldots c$ gemäß $\begin{pmatrix} 1, & \ldots, & n-2, & n-1, & n \\ 3, & \ldots, & n, & 1, & 2 \end{pmatrix}_b$ und längs $c \ldots \infty$ gemäß $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ 4, & 5, & \ldots, & 3 \end{pmatrix}_c$ zusammenzuheften ist. Wir erhalten also 4 n-blättrige Verzweigungspunkte in a, b, c, ∞. — Eine positive Umkreisung von a oder b oder c führt jedesmal in das folgende Blatt (auf das n^{te} „folgt" natürlich das 1te), eine positive Umkreisung von ∞ (d. h. eine solche, die ∞ zur Linken läßt) führt vom k^{ten} Blatt ins $(k-3)^{\text{te}}$.

2. a) Unendlich viele Blätter. Verzweigungen in a und ∞. Breiten wir in einem „nullten" Blatt gemäß der Vorbemerkung einen Zweig der Funktion aus, den wir mit w bezeichnen, so ist in den andern Blättern $w + 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ anzuheften. Die Blätter lassen wir durch den Wert von k numeriert sein und legen die mit größerem k über die mit kleinerem k. Die Blätter sind dann gemäß $\begin{pmatrix} k \\ k+1 \end{pmatrix}_a$ zusammenzuheften. Die Fläche ist offenbar wie die von $\log z$ gebaut, nur daß die Verzweigungen in a und ∞ statt in 0 und ∞ liegen.

b) Unendlich viele Blätter. Etwaige Verzweigungen in a, b und ∞. Funktionswerte wieder $w + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, die entsprechend im k^{ten} Blatt angeheftet werden. Dann ist längs $a \ldots b$ wieder gemäß $\begin{pmatrix} k \\ k+1 \end{pmatrix}_a$,

längs $b \ldots \infty$ aber gemäß $\binom{k}{k+2}_b$ zusammenzufügen, da sich bei gleichzeitiger Umkreisung von a und b sowohl $\operatorname{arc}(z-a)$ als $\operatorname{arc}(z-b)$ um 2π vermehren.

c) Ähnlich wie bei b). Da aber bei gleichzeitiger Umkreisung von a und b sich $\operatorname{arc}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ nicht ändert, sind längs $b \ldots \infty$ in jedem einzelnen Blatt für sich die Ränder zusammenzufügen. In ∞ liegt kein Verzweigungspunkt, alle Blätter verlaufen dort getrennt.

d) $\log(1+z^2) = \log(z-i)(z+i)$ nach b) zu erledigen.

e) $\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}$ nach c) zu erledigen.

3. a) Wegen $z^i = e^{i \log z}$ genau die Fläche für $\log z$. Einmalige positive Umlaufung des Nullpunktes versieht den Funktionswert mit dem Faktor $e^{-2\pi}$.

b) Ebenso. Der hinzutretende Faktor ist $e^{-2b\pi+2ai\pi}$.

4. a) $w = \sqrt[3]{z+1}$. Die Fläche ist nach Aufg. 1a zu konstruieren.

b) Es ist $w = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{(z-2)(z+2)}\right)$. Wir haben also nach K II, § 12, eine zweiblättrige Fläche mit Verzweigungen in $+2$ und -2. Einmalige Umkreisung genau eines dieser Punkte führt von w zu $-w+z = \frac{1}{w}$, zweimalige also zurück nach w.

An Stelle dieser direkten Behandlung kann auch die folgende treten: Die (implizit) vorgelegte Funktion ist invers zu $z = z(w) = w + \frac{1}{w}$, die in Bi, § 12, genau untersucht ist (mit vertauschten Buchstaben). Läuft w geradlinig von $-\infty$ nach -1, so läuft z ebenso von $-\infty$ nach -2. Geht w weiter von -1 längs der oberen Hälfte des Einheitskreises nach $+1$, so geht z von -2 geradlinig weiter nach $+2$. Geht w endlich von $+1$ geradlinig nach $+\infty$, so geht z ebenso von $+2$ nach $+\infty$. Hiernach (vgl. § 20,

Aufg. 3 u. 4, und Bi, § 9) wird das Gebiet $|w| > 1$ der oberen Halbebene auf die obere z-Halbebene abgebildet. Ebenso erkennt man (oder einfacher nach dem Spiegelungsprinzip Bi, § 10), daß das Gebiet $|w| < 1$ der oberen Halbebene auf die untere z-Halbebene abgebildet wird. Wir denken uns nun an jeden Punkt z der z-Ebene denjenigen Wert w angeheftet, für den dies z erhalten wurde. Es ist dies einer der beiden Werte der vorgelegten Funktion $w = w(z)$, und zwar derjenige, für den $\mathfrak{J}(w) \geqq 0$ ist. Die beiden Strecken $-\infty \cdots -2$ und $+2 \ldots +\infty$ erscheinen dann doppelt belegt. Wir schneiden demgemäß die z-Ebene längs dieser Strecken auf und belegen beide Ränder. (Oder man belegt die beiden z-Halbebenen einzeln und heftet sie längs der allein gleichbelegten Randstrecke $-2 \ldots +2$ aneinander.)

Genau ebenso (oder wieder durch Spiegelung an der reellen w-Achse) erkennt man, daß auch die untere w-Halbebene auf ein ebensolches z-Blatt abgebildet wird. Nur wird jetzt der i n n e r e Halbkreis des w-Einheitskreises auf die o b e r e und der äußere auf die untere z-Halbebene abgebildet. Auch in diesem z-Blatt heften wir an jede Stelle z denjenigen Wert w, für den dies z erhalten wurde.

Beide z-Blätter legen wir übereinander und heften sie mit den gleichbelegten Schnitträndern, also einfach „über Kreuz", aneinander, was die Fläche vollendet. — Ist an einem Punkte z des einen Blattes der Wert w angeheftet, so erhält man den am gleichen Punkt z des andern Blattes angehefteten Wert, indem man w erst am Einheitskreise, dann den erhaltenen Punkt an der reellen Achse spiegelt. Es ist also der Wert $\frac{1}{w}$.

c) Wir verfahren wie bei der vorigen Aufgabe, untersuchen also zuerst die inverse Funktion $z = z(w) = w^n + w^{-n}$. Nach den Erörterungen zur vorigen Aufgabe ist sofort klar: Betrachtet man (man mache sich wieder aus-

führliche Skizzen) den Sektor $0 \leqq \operatorname{arc} w \leqq \frac{\pi}{n}$ und durchläuft w den Rand des außerhalb $|w| = 1$ gelegenen Teiles desselben, in ∞ beginnend und so, daß das Innere dieses Gebietes zur Linken bleibt, so durchläuft z die reelle Achse von links nach rechts. Durchläuft w ebenso, bei 0 beginnend, den Rand des innerhalb $|w| = 1$ gelegenen Teiles des Sektors, so durchläuft w die reelle Achse von rechts nach links. Also wird — die Begründung ist genau die gleiche wie bei b) — der ganze Sektor ein-eindeutig auf ein genau solches z-Blatt abgebildet, wie es bei b) betrachtet wurde. In genau gleicher Weise werden die Sektoren $(k-1)\frac{\pi}{n} \leqq \operatorname{arc} w \leqq k\frac{\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$ auf ebensolche z-Blätter abgebildet, die wir nach dem Werte von k numerieren. In jedem Punkt z jedes Blattes denken wir uns nun wieder den Wert w angeheftet, für den dies z erhalten wurde. Diese $2n$ Blätter legen wir übereinander (das erste etwa zu unterst) und heften sie mit den gleichbelegten Rändern aneinander. Die Figur in der w-Ebene, in der die Halbstrahlen $\operatorname{arc} w = (k-1)\frac{\pi}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, abwechselnd die beiden Strecken $+2 \ldots +\infty$ und $-2 \ldots -\infty$ liefern (jede doppelt), lehrt nun sofort, daß das erste z-Blatt längs $-\infty \cdots -2$ mit dem zweiten Blatt, längs $+2 \ldots +\infty$ mit dem $(2n)^{\text{ten}}$ Blatt aneinander zu heften ist. Allgemein ist jedes Blatt mit ungerader Nummer längs $-\infty \cdots -2$ mit dem folgenden, längs $+2 \cdots +\infty$ mit dem vorangehenden aneinanderzuheften. Bei gerader Nummer ist es umgekehrt zu machen. Nach der in den Vorbemerkungen zu Aufg. 1 und 2 angegebenen Bezeichnungsweise sind also längs der Schnitte $-2 \cdots -\infty$ bzw. $+2 \cdots +\infty$ die $2n$ Blätter gemäß

$$\begin{pmatrix} 1, 2; \, 3, 4; \, \ldots; \, 2n-1, & 2n \\ 2, 1; \, 4, 3; \, \ldots; \quad 2n & , 2n-1 \end{pmatrix}_{(-2)}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 \, ; \, 2, 3; \, \ldots; \, 2n-2, \, 2n-1; \, 2n \\ 2n; \, 3, 2; \, \ldots; \, 2n-1, \, 2n-2; \, 1 \end{pmatrix}_{(+2)}$$

aneinanderzuheften. Eine gleichzeitige positive Umkreisung beider Punkte, oder also eine negative von ∞, führt von Blatt 1 nach Blatt 3, von 3 nach 5, ..., von $2n-1$ nach 1, und ebenso von 2 nach 4, ..., von $2n-2$ nach $2n$, von $2n$ wieder nach 2. Während in $+2$ und -2 je n zweiblättrige Verzweigungspunkte (n zweigliedrige Zyklen) übereinanderliegen, liegen in ∞ umgekehrt zwei n-blättrige Verzweigungspunkte (zwei n-gliedrige Zyklen) übereinander. (Daß sich diese Zyklen in der beschriebenen Weise durchsetzen, stört natürlich gar nicht. Vgl. K II, S. 97, Fußnote.)

d) Wir betrachten ähnlich wie bei den beiden vorangehenden Aufgaben zunächst die inverse Funktion $z = z(w) = w^3 - 3w$. Um zu erkennen, welche Gebiete der w-Ebene auf die obere und untere z-Halbebene abgebildet werden, setzen wir $w = u + iv$, was

$$\Re(z) = u(u^2 - 3v^2 - 3) \quad \text{und} \quad \Im(z) = v(3u^2 - v^2 - 3)$$

liefert. z wird also reell für $v = 0$ und für $u^2 - \frac{1}{3} v^2 = 1$. Die reelle Achse und diese Hyperbel zerschneiden nun die w-Ebene in 6 Gebiete, die wir folgendermaßen numerieren: Zwischen den Hyperbelästen unten 1, oben 1'; in der rechten Hyperbel oben 2, unten 2'; in der linken oben 3, unten 3'. (Man mache sich wieder eine ausführliche Skizze!) Läßt man nun w den Rand dieser Gebiete durchwandern, stets in ∞ beginnend und so, daß das umlaufene Gebiet jedesmal zur linken liegt, so findet man, daß die ungestrichenen Gebiete die obere, die gestrichenen Gebiete die untere z-Halbebene liefern. Wir nehmen demgemäß drei z-Blätter, zerschneiden sie längs der reellen Achse und nennen die oberen Halbebenen 1, 2, 3, die unteren 1', 2', 3'. An jeden

Punkt z jeder dieser Halbebenen heften wir denjenigen Wert w an, dessen Bild er bei der beschriebenen Abbildung ist. (Für jedes z ist dies eine bestimmte der 3 Wurzeln von $w^3 - 3w - z = 0$.) Die Blätter 1, 1′ sind dann, wie die Figur in der w-Ebene sofort zeigt, längs der Randstrecke $-2 \cdots +2$ gleichbelegt und werden demgemäß zusammengeheftet, so daß also $-\infty \cdots -2$ und $+2 \cdots +\infty$ Schnitte bleiben. 2 und 2′ sind längs derjenigen Randstrecke gleichbelegt, die für $1 \leqq w \leqq +\infty$ erhalten wird, also längs $-2 \cdots 0 \cdots +\infty$, und werden demgemäß dort zusammengeheftet; $-\infty \cdots -2$ bleibt Schnitt. Ebenso sind 3, 3′ längs $-\infty \cdots 0 \cdots +2$ zusammenzuheften; $+2 \cdots +\infty$ bleibt Schnitt. Die Figur in der w-Ebene lehrt nun sofort weiter, wie noch diese drei z-Blätter zusammenzufügen sind Das 1. und 2. Blatt über Kreuz längs $-\infty \cdots -2$, das 1. und 3. Blatt längs $+2 \cdots +\infty$, — sonst nichts. In der bisherigen Bezeichnungsweise hängen also die Blätter längs $-\infty \cdots -2$ bzw. $+2 \cdots +\infty$ gemäß

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{(-2)} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{(+2)}$$

zusammen. Je ein Blatt verläuft also glatt. Umkreist man beide Punkte gleichzeitig im positiven Sinne (oder also ∞ allein im negativen Sinne), so geht das 1. ins 2., das 2. ins 3., das 3. ins 1. Blatt über; in ∞ hängen also alle 3 Blätter in einem einzigen Zyklus zusammen.

e) Ersetzt man w durch iw und zugleich z durch $-iz$, so geht der vorgelegte Zusammenhang zwischen z und w in $w^3 - 3w - z = 0$, also in den in d) besprochenen über. Man hat also gegenüber d) nur in der z- und w-Ebene je eine Drehung um $\pm \frac{1}{2}\pi$ auszuführen, um die jetzige Situation zu bekommen.

VII. Kapitel.

Konforme Abbildung.

§ 20. Begriff und allgemeine Theorie.

1. a) Um arc $\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}$, d. h. der Vektor von z_0 nach z_1 ist im positiven Sinne um diesen Winkel zu drehen, um dem Vektor von w_0 nach w_1 parallel und gleichgerichtet zu werden.

b) Im Verhältnis $\left|\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}\right|$.

2. Nach den allgemeinen Vereinbarungen K I, S. 129 und Bi, § 3, dann und nur dann, wenn $1 : f(z)$ die Umgebung von z_0 konform auf die des Nullpunktes abbildet. Hat $f(z)$ einen Pol der Ordnung β in z_0, so hat $1 : f(z)$ dort eine Nullstelle der Ordnung β. Konformität findet also dann und nur dann statt, wenn der Pol von $f(z)$ in z_0 von der 1. Ordnung ist. b) Hier haben wir $1 : f\left(\frac{1}{z'}\right)$ bei $z' = 0$ zu prüfen. Hat aber $f(z)$ in $z = \infty$ einen Pol der Ordnung β, so hat diese neue Funktion in $z' = 0$ eine Nullstelle der Ordnung β. Konformität findet also dann und nur dann statt, wenn der Pol von der 1. Ordnung ist. c) Konformität findet dann und nur dann statt, wenn $z = +\infty$ eine w_0-Stelle der 1. Ordnung ist.

3. Satz und Beweis sind sehr ähnlich den in Bi, § 9 gegebenen. Es sei G' die Menge der Werte $w = f(z)$ für die z aus G und auf C. Es sei ω ein Randpunkt dieser Menge. Dann gibt es eine Punktfolge (w_n) in G', die $\rightarrow \omega$ strebt. Es seien die z_n so gewählt, daß $f(z_n) = w_n$. Sie liegen in G und haben daher mindestens einen Häufungspunkt ζ. Es muß $f(\zeta) = \omega$ sein. Daher kann ζ nicht innerhalb G liegen, da sonst eine volle Umgebung von ζ auf eine volle Umgebung von ω abgebildet würde; ω sollte aber Randpunkt sein. Also liegt ζ auf C und folglich ω auf C' Dann hat aber G' überhaupt

keinen Punkt außerhalb C'. Denn läge etwa w_0 aus G' außerhalb C' und ist $\mathfrak{p}$ ein Polygonzug, der w_0, ohne C' zu treffen, mit ∞ verbindet, so müßte, da $f(z)$ in G beschränkt ist, auf $\mathfrak{p}$ ein Randpunkt von G' liegen, was unmöglich, da $\mathfrak{p}$ die Kurve C' nicht trifft. Also liegt G' ganz innerhalb C'. Ist nun w_1 ein beliebiger Punkt innerhalb C', so ist

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C')} \frac{dw}{w - w_1} = \frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f'(z)}{f(z) - w_1}\, dz,$$

d. h. w_1 wird von $f(z)$ innerhalb C genau einmal angenommen. G' füllt also das Innere von C' genau einmal aus. (Der noch denkbare Fall, daß ein z innerhalb G sein Bild w auf dem Rande C' von G hätte, ist durch den Satz von der Gebietstreue — Bi, § 1 — ausgeschlossen.)

4. Man erledigt diese Erweiterungen des vorigen Satzes durch geeignete Transformationen mittels reziproker Radien. — a) Es gehe zunächst nur C' durch ∞. Auch dann teilt C' die Ebene in zwei Gebiete und G' liegt wieder nur in dem einen der beiden. Sei w_1 ein Punkt im Innern des andern und $R > 0$ so gewählt, daß G' und C' ganz außerhalb $|w - w_1| = R$ liegen. Setzt man nun $\omega = \frac{R^2}{w - w_1}$, so erhält man statt C' eine ganz im Endlichen liegende Kurve Γ', auf die nun der Satz der vorigen Aufgabe angewendet werden kann. — War z_0 der Punkt von C, der nach ∞ geworfen wurde, so soll jetzt $\frac{R^2}{f(z) - w_1}$ in z_0 regulär und $= 0$ sein. Das bedeutet aber, daß $f(z)$ in z_0 nur einen Pol haben durfte. — b) Geht auch C durch ∞, so führt eine Transformation der Form $\zeta = \frac{r^2}{z - z_1}$ auf den bisherigen Fall zurück. Die Voraussetzung der Regularität in dem auf C gelegenen Punkt ∞ ist also gemäß K I, § 34 zu verstehen. Spielt ∞ jetzt die Rolle des in a) benutzten Punktes z_0, so darf $f(z)$ in ∞ nur einen Pol haben.

5. Es sei $z_0, z_1, \ldots, z_n$ eine Einteilung von L wie in K I, § 11, es sei $f(z_\lambda) = w_\lambda$ und also $w_0, w_1, \ldots, w_n$ eine Einteilung der stetigen Kurve L', endlich sei M eine Schranke von $f'(z)$ längs L. Dann ist wegen

$$|w_\lambda - w_{\lambda-1}| = \left| \int_{z_{\lambda-1}}^{z_\lambda} f'(z)\, dz \right| \leqq |z_\lambda - z_{\lambda-1}| \cdot M$$

$\sum |w_\lambda - w_{\lambda-1}|$ zugleich mit $\sum |z_\lambda - z_{\lambda-1}|$ beschränkt. Da man sich leicht überzeugt, daß jede Einteilung von L' auf diese Art erhalten werden kann, so ist L' rektifizierbar, also ein Weg. — Nach § 4, Aufg. 2, kann genauer $w_\lambda - w_{\lambda-1} = (z_\lambda - z_{\lambda-1}) \cdot f'(\zeta'_\lambda)$ gesetzt werden, wo ζ'_λ einen Punkt bedeutet, der bei Verfeinerung der Einteilung sich gleichmäßig für alle λ dem Punkte z_λ nähert. Bezeichnet also ζ_λ irgendeinen Punkt auf dem Stück $z_{\lambda-1} \ldots z_\lambda$ des Weges L, so ist

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\lambda=1}^{n} |w_\lambda - w_{\lambda-1}| = \lim_{n \to \infty} \sum_{\lambda=1}^{n} |z_\lambda - z_{\lambda-1}| \cdot |f'(\zeta_\lambda)|$$

und folglich im Sinne von § 4, Aufg. 3

$$L' = {}^{(L)}\!\!\int |f'(z)| \cdot |dz|.$$

6. In $|z| < r$ sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Führt man die für eine Reihe $z + a_2 z^2 + \cdots$ in Bi, § 19, S. 93/94 angegebene Rechnung für den jetzigen Fall durch, so erhält man ganz analog

$$J(\varrho) = (|a_1|^2 \varrho^2 + 2\,|a_2|^2 \varrho^4 + \cdots + n\,|a_n|^2 \varrho^{2n} + \cdots)\,\pi.$$

Die etwaigen Nullstellen von $f'(z)$ bedeuten für die Transformationsdeterminante des Doppelintegrals (Bi, S. 93) nur, daß sie an (endlich vielen) isolierten Punkten 0, sonst stets > 0 ist. Man kann daher den Kreis in endlich viele Teilbereiche so zerlegen, daß für jeden einzelnen Teil die Ab-

bildung schlicht und also die Transformation des Doppelintegrals nach den klassischen Sätzen der Integralrechnung erlaubt ist. — Gilt die Formel bzw. inwieweit gilt die Formel auch noch für $\varrho = r$?

7. Das Verhältnis ist $= \dfrac{J(\varrho)}{\varrho^2 \pi}$ und strebt also $\to |a_1|^2$. Nach den Ausführungen zur vorigen Aufgabe gilt dies auch für $a_1 = 0$.

8. a) Nach Aufg. 5 gleich dem längs $|z| = r$ genommenen Integral $\int |f'(z)|\,|dz|$.

b) Nach Aufg. 6 und Bi, § 19, gleich dem über die Kreisscheibe $|z| \leqq r$ der xy-Ebene erstreckten Flächenintegral $\int |f'(z)|^2 dx\,dy$.

c) = Richtungswinkel der Tangente an den Kreis + Verdrehung $= \operatorname{arc} z + \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arc} f'(z) = \operatorname{arc}(izf'(z))$.

d) Definitionsgemäß ist, wenn $z = re^{i\varphi}$ gesetzt wird, die Krümmung gleich der Ableitung der Tangentenrichtung nach φ, dividiert durch die Ableitung der Bildbogenlänge nach φ. Die Tangentenrichtung ist nach c)

$$= \operatorname{arc}(izf'(z) = \Im(\log izf'(z)).$$

Ihre Ableitung nach φ ist also

$$= \Im\left(\frac{d}{dz}(\log izf'(z)) \cdot \frac{dz}{d\varphi}\right) = \Im\left(\frac{zf''(z) + f'(z)}{zf'(z)} \cdot iz\right)$$
$$= \Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right).$$

Die Ableitung der Bildbogenlänge nach φ ist nach a)

$$= |f'(z)| \cdot |z| \quad \text{(Beweis?)}.$$

Also ist die gesuchte Krümmung

$$= \frac{\Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)}{|zf'(z)|}.$$

9. Da bei den Fragen a), c) und d) nur die Regularität für $|z| = r$ in Betracht kam, so ändert sich hier gar nichts.

b) Ist $f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$ für $|z| \geqq r$, so ist das Bild dieses Gebietes identisch mit dem Bilde von $|z'| \leqq \frac{1}{r}$ durch die Funktion $\varphi(z') = a_0 + a_1 z' + a_2 z'^2 + \cdots$. Nach Aufg. 6 ist also der Inhalt des Bildes

$$= \left(\frac{|a_1|^2}{r^2} + 2\frac{|a_2|^2}{r^4} + \cdots + n\frac{|a_n|^2}{r^{2n}} + \cdots\right)\pi.$$

10. Da $\varphi(z)$ eine ein-eindeutige Abbildung vermitteln soll, ist $\varphi'(z) \neq 0$ in $|z| < 1$, also die inverse Funktion $\Phi(w)$ innerhalb G regulär und ihre dortigen Funktionswerte sind dem Betrage nach < 1. Daher ist $\Phi(f(z)) = F(z)$ in $|z| < 1$ regulär, und es ist dort $|F(z)| < 1$. Endlich ist $F(0) = \Phi(w_0) = 0$. Die Anwendung des Schwarzschen Lemmas auf $F(z)$ liefert, daß $|F(z)| \leqq |z|$ ist in $|z| < 1$, und daß das Gleichheitszeichen nur eintreten kann, falls $F(z)$ für ein festes α die Form $e^{i\alpha} z$ hat. Ist nun $|z| \leqq \varrho < 1$, so ist dort auch $|F(z)| \leqq |z| \leqq \varrho$ und folglich liegt $\varphi(F(z)) = f(z)$ in $\overline{G}_\varrho$, und zwar in seinem Innern, außer wenn $F(z) = e^{i\alpha} z$, also $f(z) = \varphi(e^{i\alpha} z)$ ist.

11. Durch $w = \varphi(z) = \frac{-\overline{w}_0 z + w_0}{z+1} = -u_0\frac{z-1}{z+1} + iv_0$ wird $|z| < 1$ auf G, d. h. auf $\Re(w) > 0$ so abgebildet, daß 0 nach w_0 kommt. Der Kreis $|z| \leqq \varrho$ geht dabei in einen Kreis $\overline{G}_\varrho$ über, der über der Strecke $u_0\frac{1-\varrho}{1+\varrho} + iv_0 \ldots u_0\frac{1+\varrho}{1-\varrho} + iv_0$ als Durchmesser steht. Ist also $f(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion, deren dortige Werte in G liegen, so liegen sie sogar in $\overline{G}_\varrho$, falls $|z| \leqq \varrho$ ist. Wegen der angegebenen Lage von $\overline{G}_\varrho$ ist die Behauptung damit schon bewiesen. Das Gleichheitszeichen kann nur bei $f(z) = \varphi(e^{i\alpha} z)$ gültig sein.

12. Da der Radius des Kreises $\bar{G}_\varrho$ gleich $\frac{2\varrho u_0}{1-\varrho^2}$ ist, so ist offenbar

$$v_0 - \frac{2\varrho u_0}{1-\varrho^2} \leqq \Im f(z) \leqq v_0 + \frac{2\varrho u_0}{1-\varrho^2}$$

und

$$|f(z)| \leqq |u_0 + iv_0| + \frac{2\varrho u_0}{1-\varrho^2}.$$

13. Es sei $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ und $z_1 \neq z_2$. Dann ist

$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} = a_1 + a_2(z_2+z_1) + \cdots$$
$$+ a_n\left(z_2^{n-1} + z_2^{n-2} z_1 + \cdots + z_1^{n-1}\right) + \cdots.$$

Also $\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right| > |a_1| - 2|a_2| - 3|a_3| - \cdots \geqq 0$ und somit $f(z_1) \neq f(z_2)$.

14. Ist $\lim f_n(z) = f(z)$, so ist $f(z)$ jedenfalls innerhalb B regulär. Es sei $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ und $z_1 \neq z_2$. Die Folge der Funktionen $f_n(z) - f_n(z_1)$ konvergiert, und zwar gleichmäßig in jedem Kreise $|z| \leqq \varrho < 1$, gegen die Funktion $f(z) - f(z_1)$. Nach dem Satz aus § 5, Aufg. 4, hat diese Funktion keine andern Nullstellen in $|z| < 1$ als die dortigen Häufungsstellen von Nullstellen von $f_n(z) - f_n(z_1)$. Diese Funktionen verschwinden aber wegen der Schlichtheit der $f_n(z)$ nur für $z = z_1$. Also ist $f(z_2) - f(z_1) \neq 0$.

15. Ist $f(z)$ ungerade, so ist $(f(z))^2$ eine gerade Funktion, also eine in $|\zeta| < 1$ reguläre Funktion von $\zeta = z^2$. Es sei $(f(z))^2 = \varphi(\zeta)$. Diese Funktion ist wieder schlicht. Denn ist $|\zeta_1| < 1$, $|\zeta_2| < 1$, $\zeta_1 \neq \zeta_2$, so ist, wenn z_1 und z_2 je eine Quadratwurzel aus ζ_1 und ζ_2 bedeutet, auch $z_1 \neq \pm z_2$, also $f(z_1) \neq \pm f(z_2)$ und folglich $\varphi(\zeta_1) \neq \varphi(\zeta_2)$. Wendet man nun auf $\varphi(\zeta)$ die Bi, S. 114 bewiesene Ungleichung an, so folgt für $|\zeta| < 1$

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \leqq |\varphi(\zeta)| \leqq \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2}.$$

Führt man wieder z und $f(z)$ ein, so steht die Behauptung da.

16. Sind $w = f(z)$ und $w = \varphi(z)$ zwei Funktionen, die beide die in der Aufgabe beschriebene Abbildung leisten, und ist $z = \bar{\varphi}(w)$ die zu $w = \varphi(z)$ inverse Funktion, so bildet $f(\bar{\varphi}(w))$ einen Kreis um 0 so auf einen andern Kreis um 0 ab, daß der Mittelpunkt fest bleibt. Daher ist nach Bi, § 5, 4

$$f(\bar{\varphi}(w)) = c \cdot w, \quad \text{d. h.} \quad f(z) = c \cdot \varphi(z).$$

Der Vergleich der Ableitungen in $z = a$ zeigt, daß $c = +1$ ist. Die Abbildungen sind also identisch; die Größe des Bildkreises liegt eindeutig fest.

§ 21. Spezielle Abbildungsaufgaben.

1. Bildet man nach I, § 12, Aufg. 20 K_1 und K_2 auf konzentrische Kreise K_1' und K_2' ab, so gehen die k_ν in kongruente Kreise über, deren Kreisscheiben in dem Ringgebiet zwischen K_1' und K_2' liegen und diese beiden Kreise berühren. Je nachdem nun der konstante Winkel, unter dem diese Bilder der k_ν vom Nullpunkt aus erscheinen, zu 2π in rationalem Verhältnis steht oder nicht, wird sich die Kette schließen oder nicht. Ist das genannte Verhältnis $= p : q$ (p, q ganz und teilerfremd), so schließt sich die Kette mit dem Kreise k_q. — Wie man sieht, ist die Lösung wesentlich leichter als die präzise Formulierung der Aufgabe.

2. Durch eine Translation bringe man zunächst z_1 nach 0 und durch eine nachfolgende Drehung um 0 den Mittelpunkt von K_2 auf die positiv-reelle Achse, d. h. man bilde die z-Ebene durch $\zeta = \frac{|z_2 - z_1|}{z_2 - z_1}(z - z_1)$ zunächst auf eine Hilfsebene ab. Die zu den Schnittpunkten beider Kreise mit der reellen Achse simultan konjugierten Punkte ζ_0 und

ζ_0' berechnen sich nun als $\zeta_0 = -\frac{2}{15}$ und $\zeta_0' = -\frac{32}{15}$. Bringt man diese durch $w = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0'}$ nach 0 und ∞, so erhält man als Bilder von K_1 und K_2 zwei Kreise um 0 mit den Radien $R_1 = \frac{1}{4}$ und $R_2 = \frac{3}{4}$. Nun muß $\frac{1}{\pi} \arcsin \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$ eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ sein. Da sich $\frac{p}{q} = \frac{1}{6}$ ergibt, so schließt sich die Kette der k_ν stets mit dem sechsten Kreise, wie man auch mit k_1 und k_2 anfangen mag.

3. Wegen der Gruppeneigenschaft der linearen Funktionen (Bi, § 4, Satz 3) ist jedes $z^{(n)}$ eine lineare Funktion von z. Diese haben offenbar für jedes n wieder dieselben Fixpunkte. Die quadratischen Gleichungen (Bi, § 4, Satz 6) $c_n z^2 + (d_n - a_n) z - b_n = 0$ haben also für jedes n dieselben Wurzeln wie $c z^2 + (d - a) z - b = 0$. Daraus folgt die Behauptung. — Bringt man nach I, § 12, Aufg. 21 die Abbildung auf die Fixpunktnormalform, so läßt die zu dieser Aufgabe gegebene ausführliche Lösung sofort erkennen, wie eine n-malige Wiederholung derselben Abbildung wirkt.

4. Wir legen ein räumliches $\xi \eta \zeta$-Koordinatensystem so, daß die ξ- und die η-Achse bzw. mit der x- und der y-Achse der z-Ebene zusammenfallen und daß die ζ-Achse in 0 senkrecht auf der z-Ebene steht. Dann lautet die Gleichung der Zahlenkugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta(\zeta - 1) = 0$ und die Gleichungen der Geraden vom Nordpol durch den Kugelpunkt $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ lauten in Parameterdarstellung $\xi = \xi_0(1 + t)$, $\eta = \eta_0(1 + t)$, $\zeta = \zeta_0 + (\zeta_0 - 1)t$. Für $t = \zeta_0 : (1 - \zeta_0)$ wird $\zeta = 0$ und folglich ist, wenn wir noch den Index 0 unterdrücken,

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1 - \zeta};$$

$$dx = \frac{(1 - \zeta)\, d\xi + \xi\, d\zeta}{(1 - \zeta)^2}, \qquad dy = \frac{(1 - \zeta)\, d\eta + \eta\, d\zeta}{(1 - \zeta)^2}.$$

Die Konformität der Abbildung verlangt nun, daß die vom Punkte $z = x + iy$ der z-Ebene und vom Punkte $\xi\eta\zeta$ der Kugel ausgehenden Linienelemente in den beiden Flächen in einem Verhältnis zueinander stehen, das nur von der Lage des Punktepaares und nicht von der Richtung des Linienelementes abhängt. Es ist aber, wenn noch die Kugelgleichung berücksichtigt wird,

$$dx^2 + dy^2 = (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) : (1 - \zeta)^2,$$

worin der Beweis der Behauptung liegt.

5. Benutzen wir λ und β als Parameter, so ist, wenn wir noch den gemeinsamen Faktor R überall fortlassen,

$$\xi = \cos\beta \cos\lambda, \quad \eta = \cos\beta \sin\lambda, \quad \zeta = \sin\beta$$

die Gleichung der Kugel. Hiernach ist

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\beta^2 + \cos^2\beta \, d\lambda^2.$$

Und ganz direkt ergibt sich

$$dx^2 + dy^2 = d\lambda^2 + \frac{d\beta^2}{\cos^2\beta} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{\cos^2\beta},$$

was die Konformität beweist.

6. Durch $z' = 4z + 1$ wird der Beginn des Schnittes nach 0 und der bisherige Nullpunkt nach $+1$ verlegt. $z'' = \sqrt{z'} = \sqrt{4z+1}$ macht aus dem neuen Gebiete die rechte Halbebene, falls wir den Hauptwert der Wurzel nehmen. Durch $w = \frac{z''-1}{z''+1}$ wird diese Halbebene auf den Einheitskreis der w-Ebene abgebildet. Also leistet die Funktion

$$w = \frac{\sqrt{4z+1} - 1}{\sqrt{4z+1} + 1} \quad \text{oder} \quad z = \frac{w}{(1-w)^2}$$

das Verlangte, da sie überdies in $z = 0$ verschwindet und ihre Ableitung dort $= 1$ ist. — Es ist dies diejenige Ab-

bildung, der bei vielen Fragen (Bi, § 22) eine Sonderrolle zukommt.

7. Die Gleichung kann in der Form

$$a\left(w+\frac{b}{2a}\right)^2 = z + \frac{b^2-4ac}{4a}$$

geschrieben werden. Setzt man also

$$\sqrt{a}\left(w+\frac{b}{2a}\right) = w', \qquad z + \frac{b^2-4ac}{4a} = z',$$

so ist einfach $w'^2 = z'$, $w' = \sqrt{z'}$ zu untersuchen. Wir haben also eine zweiblättrige Fläche mit den Verzweigungen in $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ und ∞. Geht z in den ersten dieser Punkte, so geht w nach $-\frac{b}{2a}$; umläuft ihn z einmal, so geht w' in $-w'$, d. h. w in $-w-\frac{b}{a}$ über, also in denjenigen Punkt, der zu w spiegelbildlich in bezug auf den Punkt $-\frac{b}{2a}$ gelegen ist.

8. Durch $z' = \frac{z+2}{z-2}$ wird der Schnitt in die negativ-reelle Achse gebracht, $z'' = \sqrt{z'}$ macht daraus die rechte Halbebene, $w = \frac{z''-1}{z''+1}$ aus ihr den Einheitskreis. Es ist also

$$w = \frac{\sqrt{\frac{z+2}{z-2}}-1}{\sqrt{\frac{z+2}{z-2}}+1} \qquad \text{oder} \qquad z = w + \frac{1}{w}.$$

Dabei ist der Hauptwert der Wurzel zu nehmen; mit dem andern Wurzelwert wird die Abbildung des gegebenen Bereiches auf das Äußere des Einheitskreises geleistet. (Vgl. Bi, § 12.)

9. Ist $z' = x' + iy'$ Spiegelbild von $z = x + iy$ am Einheitskreis, so liefert

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos t}{2a(1 - \cos t)}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\sin t}{2a(1 - \cos t)}$$

oder

$$x' + \frac{1}{4a} = \frac{1}{4a} \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}, \quad y'^2 = \frac{1}{4a^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}$$

oder endlich $y'^2 = \frac{1}{a}\left(x' + \frac{1}{4a}\right)$ das Spiegelbild der Kardioide. Dies ist also eine Parabel mit dem Brennpunkt in 0, dem Scheitel in $-\frac{1}{4a}$. Dem Äußern der Kardioide entspricht das Innere der Parabel, das — wenn wir die Akzente wieder weglassen — durch $\Im(\sqrt{z}) < \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $\sqrt{a} > 0$, definiert werden kann. Dieses Parabelinnere wird nach I, § 13, Aufg. 14 durch $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\sqrt{a}}{2i}\sqrt{z}\right)$ auf das Innere eines Einheitskreises abgebildet. Daher werden das Äußere der Kardioide in der z-Ebene und das Innere des Einheitskreises in der w-Ebene durch

$$w = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\sqrt{a}}{2i}\sqrt{\frac{1}{z}}\right) \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{a\pi^2}{\log^2\left(\frac{i+\sqrt{w}}{i-\sqrt{w}}\right)}$$

aufeinander abgebildet.

10. Sind $\omega = 2\alpha$ und $-i\omega' = 2\beta$ positiv, so wird durch $\wp(z \mid \alpha, i\beta)$ nach § 14, Aufg. 7 das Rechteck $0 \leqq x \leqq \alpha$, $0 \leqq y \leqq \beta$ auf die untere Halbebene abgebildet. Nehmen wir also $\alpha = 4$, $\beta = 2$, so bildet $\wp(z + 2 + i \mid 4, 2i)$ das vorgelegte Rechteck auf die untere Halbebene ab. Also wird es durch

$$w = \frac{\wp(z + 2 + i \mid 4, 2i) + i}{\wp(z + 2 + i \mid 4, 2i) - i}$$

auf den Einheitskreis der w-Ebene abgebildet.

11. Wir werden zeigen, daß durch das Integral $w = \int_0^z t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}\,dt$ bei geeigneter Wahl der Bestimmung des Integranden die obere z-Halbebene auf ein gleichseitiges Dreieck der w-Ebene abgebildet wird. Dazu haben wir nur $\operatorname{arc} t$ und $\operatorname{arc}(1-t)$ so festzulegen, daß sie eindeutig und stetig bleiben, solange $\mathfrak{J}(t) \geqq 0$ bleibt (bei $t=0$ und $+1$ natürlich nur als Grenzwerte). Das ist offenbar der Fall, wenn wir festsetzen, daß stets

$$0 \leqq \operatorname{arc} t \leqq +\pi \quad \text{und} \quad -\pi \leqq \operatorname{arc}(1-t) \leqq 0$$

genommen werden soll. — Ist nun zunächst $z = x$, $0 < x < 1$, so ist, geradlinig genommen,

$$w = \int_0^x t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}\,dt.$$

Es bewegt sich w also, wenn x von 0 bis 1 wächst, von 0 an monoton nach rechts bis zum Punkte

$$w = s = \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}\,dt.$$

[Der Wert dieses Eulerschen Integrales erster Gattung läßt sich bekanntlich durch die Γ-Funktion geschlossen angeben. Es ist $s = (\Gamma(\frac{1}{3}))^2 : \Gamma(\frac{2}{3})$]. — Ist jetzt $z = x$, $1 < x < +\infty$, so setzen wir, da die Integrale bei 0 und 1 stetig bleiben,

$$w = s + \int_1^x t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}\,dt.$$

Jetzt ist aber $\operatorname{arc}(1-t) = -\pi$, und also $(1-t)^{-\frac{2}{3}} = e^{+\frac{2}{3}\pi i}(t-1)^{-\frac{2}{3}}$, so daß wir

$$w = s + e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_1^x t^{-\frac{2}{3}}(t-1)^{-\frac{2}{3}}\,dt$$

erhalten. Das neue Integral ist wieder positiv und wächst, wenn x von $+1$ nach $+\infty$ geht, monoton von 0 bis zum Werte $\int\limits_1^\infty t^{-\frac{2}{3}}(t-1)^{-\frac{2}{3}}dt$, der sich durch $t = \frac{1}{u}$ wieder als $= s$ zu erkennen gibt. Also bewegt sich w von $+s$ aus auf dem Strahle mit der Richtung $\frac{2}{3}\pi$ um die Strecke s, gelangt also bis zum Punkte $s\left(1 + e^{\frac{2}{3}\pi i}\right) = se^{\frac{\pi i}{3}}$. — Ist endlich $z = -x$ und $x > 0$, so ist auf dem geradlinigen Wege von 0 nach z jetzt $\operatorname{arc} t = \pi$, $\operatorname{arc}(1-t) = 0$ zu setzen. Setzt man noch $|t| = \tau$, so wird jetzt

$$w = -e^{-\frac{2}{3}\pi i}\int\limits_0^x \tau^{-\frac{2}{3}}(1+\tau)^{-\frac{2}{3}}d\tau.$$

Geht also x von 0 nach $-\infty$, so ist auch dies neue Integral positiv und wächst monoton von 0 bis zum Werte $\int\limits_0^\infty \tau^{-\frac{2}{3}}(1+\tau)^{-\frac{2}{3}}d\tau$, für den sich durch $\tau = \frac{t}{1-t}$ wieder der Wert s ergibt. Also bewegt sich, wenn z von 0 nach $-\infty$ läuft, w von 0 in der Richtung von $-e^{-\frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{\pi i}{3}}$ um die Strecke s, gelangt also wieder zum Punkte $se^{\frac{\pi i}{3}}$.

Durchläuft also z im positiven Sinne die ganze reelle Achse, so umläuft w im positiven Sinne das gleichseitige Dreieck mit den Ecken $0, s, se^{\frac{\pi i}{3}}$. Also umläuft

$$w = \frac{1}{s}\int\limits_0^z t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}dt = f(z)$$

das vorgelegte Dreieck. Die durch dies Integral in der abgeschlossenen oberen Halbebene eindeutig definierte Funktion $f(z)$ bildet also diese Halbebene auf das vorgelegte

Dreieck ein-eindeutig und, von den Stellen $0, 1, \infty$ abgesehen, auch konform ab. Die inverse Funktion leistet also die in der Aufgabe verlangte Abbildung.

12. a) Die Vieldeutigkeit kommt durch die Pole des Integranden in $1, \omega, \omega^2$ zustande $\left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$, in denen die Residuen $= \frac{1}{3}, \frac{\omega^2}{3}$ und $\frac{\omega}{3}$ sind. Die Ableitung $f_1'(z)$ verschwindet im Endlichen nur in 0 und von der 1. Ordnung; die Umgebung des Nullpunktes wird also nicht schlicht abgebildet, die dortigen Winkel werden verdoppelt. In der Umgebung von ∞ ist $f_1(z)$, da der Integrand dort von der 2. Ordnung verschwindet, eindeutig und in ∞ selbst regulär (vgl. § 7, Aufg. 8). Wir zerschneiden daher die Ebene nur längs der drei Strecken von 0 nach 1, von 0 nach ω und von 0 nach ω^2. Wir lassen nun z die sechs Schnittränder so durchlaufen, daß die Ebene zur Linken liegt. Lassen wir 1) z längs des oberen Schnittrandes von 0 nach 1 laufen, so dürfen wir w mit 0 beginnen lassen; es geht dann auf der negativ-reellen Achse nach $-\infty$. Da man zu den gegenüberliegenden Punkten desselben Schnittes durch einmalige negative Umlaufung des Poles $+1$ mit dem Residuum $\frac{1}{3}$ gelangt, so sind die dortigen Werte w je um $-2\pi i \cdot \frac{1}{3}$ größer. Geht also 2) z von $+1$ längs des unteren Randes zurück nach 0, so durchläuft w die um $-\frac{2\pi i}{3}$ verschobene negativ-reelle Achse zurück bis zum Punkte $-\frac{2\pi i}{3}$. Geht jetzt 3) z von 0 nach ω^2, so hat die Bahn von z in 0 den Winkel $-\frac{2}{3}\pi$; die von w muß daher in $-\frac{2\pi i}{3}$ den Winkel $-\frac{4}{3}\pi$ haben. w geht also jetzt in der Richtung $-\frac{\pi}{3}$ und wieder geradlinig (warum?) nach ∞. Kehrt 4) z nach negativer Umlaufung des Poles ω^2 mit dem Resi-

duum $\frac{\omega}{3}$ nach 0 zurück, so durchläuft w dieselben Werte, wie eben, in umgekehrter Reihenfolge und um $-2\pi i \frac{\omega}{3}$ vermehrt, durchläuft also die Parallele zur letzten Geraden durch $-2\pi i \cdot \frac{1}{3} - 2\pi i \frac{\omega}{3} = 2\pi i \frac{\omega^2}{3}$ und bis zu diesem Punkte hin. Geht jetzt 5) z von 0 nach ω, so hat die Bahn von z in 0 wieder einen Winkel von $-\frac{2}{3}\pi$, die von w also einen solchen von $-\frac{4}{3}\pi$, und somit geht w von dem zuletzt genannten Punkte in der Richtung $+\frac{\pi}{3}$ wieder nach ∞ und kehrt, nachdem z den Pol ω mit dem Residuum $\frac{\omega^2}{3}$ negativ umlaufen hat und 6) nach 0 zurückgeht, mit den um $-2\pi i \cdot \frac{\omega^2}{3}$ vermehrten Werten zurück, also parallel zur vorigen Richtung und bis zum Punkte $2\pi i \frac{\omega^2}{3} - 2\pi i \frac{\omega^2}{3} = 0$. Die Bahn von w ist geschlossen. Unsere aufgeschnittene z-Ebene wird also durch $w = f_1(z)$ ein-eindeutig und, von den Punkten $0, 1, \omega, \omega^2$ abgesehen, konform auf das zur Linken der beschriebenen w-Bahn gelegene Gebiet abgebildet. Dies besteht aus dem gleichseitigen Dreieck mit den Ecken 0, $-2\pi i \cdot \frac{1}{3}$, $+2\pi i \cdot \frac{\omega^2}{3}$ und drei an seine Seiten nach außen senkrecht angesetzten Halbstreifen.

b) Durch die Substitution $z = \frac{1}{z'}$ läßt sich $f_2(z)$ auf $f_1(z)$ zurückführen. Es ist $f_2(z) = f_1\left(\frac{1}{z}\right) + \text{const.}$

13. Liegt z in G, so liegt $z' = \frac{1}{2}\pi z^2$ in dem Streifen $0 < \mathfrak{J}(z') < \pi$, also $z'' = e^{z'} = e^{\frac{1}{2}\pi z^2}$ in der oberen z''-Halbebene. Aus a wird erst $a' = \frac{1}{2}\pi a^2$, dann $a'' = e^{a'} = e^{\frac{1}{2}\pi a^2}$, welch letzterer Wert positiv imaginär ist. Durch $z''' = \frac{z'' - a''}{z'' - \bar{a}''}$

erhalten wir den Einheitskreis in der z'''-Ebene; a'' gelangt nach 0. Es ist

$$\frac{dz'''}{dz} = \frac{dz'''}{dz''} \cdot \frac{dz''}{dz} = \frac{a'' - \bar{a}''}{(z'' - \bar{a}'')^2} \cdot z'' \cdot \pi z.$$

Für $z = a$ ist dies wegen $\bar{a}'' = -a''$ gleich $\frac{1}{2}\pi a$. Also bildet $w = \frac{2}{\pi a} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} - e^{\frac{1}{2}\pi a^2}}{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} - e^{\frac{1}{2}\pi \bar{a}^2}}$ das gegebene Gebiet so auf einen Kreis um $w = 0$ ab, daß a nach 0 kommt und dort die Ableitung $= 1$ ist. Der Radius dieses Kreises ist $= r(G; a) = \frac{2}{\pi |a|}$.

14. a) Ist $|a - z_0| = \varrho < R$, so liefert

$$w = (R^2 - \varrho^2) \frac{z - a}{R^2 - (\bar{a} - \bar{z}_0)(z - z_0)}$$

die notwendige Abbildung; $z = z_0 + R$ liefert $r(G; a) = \frac{R^2 - \varrho^2}{R}$. Die Fläche ist also ein Rotationsparaboloid, das durch die Peripherie $|z - z_0| = R$ hindurchgeht und seinen Scheitel über z_0 zu liegen hat.

b) Ist $\mathfrak{J}(a) > 0$, so leistet $w = (a - \bar{a}) \frac{z - a}{z - \bar{a}}$ die nötige Abbildung; $z = 0$ liefert $r(G; a) = |a - \bar{a}| = 2\mathfrak{J}(a)$. Die Fläche ist also eine Ebene, die die z-Ebene längs der reellen Achse schneidet.

c) Ist $0 < \mathfrak{J}(a) < \pi$, so leistet (vgl. Aufg. 13)

$$w = e^{-a}(e^a - e^{\bar{a}}) \frac{e^z - e^a}{e^z - e^{\bar{a}}}$$

die nötige Abbildung; $z = 0$ liefert $r(G, a) = |1 - e^{\bar{a} - a}| = 2 \sin \beta$, wenn $\mathfrak{J}(a) = \beta$ gesetzt wird. Die Fläche ist eine Zylinderfläche, deren Erzeugende parallel zur reellen Achse sind.

d) Die Rechnungen in c) und in Aufg. 13 lehren, daß jetzt

$$w = \frac{1}{\pi a}\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}(\bar{a}^2 - a^2)}\right)\frac{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} - e^{\frac{1}{2}\pi a^2}}{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} - e^{\frac{1}{2}\pi \bar{a}^2}}$$ die nötige Abbildung

leistet. Für $z = 0$ findet man jetzt

$$r(G; a) = \frac{1}{\pi |a|} \cdot \left|1 - e^{\frac{\pi}{2}(\bar{a}^2 - a^2)}\right| = \frac{2 \sin \alpha \beta \pi}{\pi \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

wenn $a = \alpha + i\beta$ gesetzt wird. Damit ist in den Variablen α, β die Gleichung der Fläche gegeben.


W
&
G